

Aula 16

*Banco do Brasil - Matemática - 2023
(Pós-Edital)*

Autor:
**Equipe Exatas Estratégia
Concursos**



Índice

1) Logaritmo	3
2) Função Logarítmica	24
3) Equação Logarítmica	41
4) Inequação Logarítmica	50
5) Questões Comentadas - Logaritmos - Cesgranrio	63
6) Questões Comentadas - Função Logarítmica - Cesgranrio	77
7) Questões Comentadas - Equações Logarítmicas - Cesgranrio	80
8) Questões Comentadas - Inequações Logarítmicas - Cesgranrio	89
9) Lista de Questões - Logaritmos - Cesgranrio	91
10) Lista de Questões - Função Logarítmica - Cesgranrio	95
11) Lista de Questões - Equações Logarítmicas - Cesgranrio	97
12) Lista de Questões - Inequações Logarítmicas - Cesgranrio	100

LOGARITMOS

Estudamos na aula de equações e inequações exponenciais igualdades do tipo:

$$2^y = 8$$

Onde podíamos reduzir ambas as potências à mesma base e resolver para y .

$$2^y = 8$$

$$2^y = 2^3 \rightarrow y = 3$$

Porém, em diversas outras situações, **não conseguiremos** reduzir as potências.

Imagine que uma questão da sua prova pergunte qual o valor de y na igualdade abaixo:

$$3^y = 5$$

Como você resolveria?

Não conseguiríamos reduzir as potências à mesma base.

Para poder resolver esta e outras operações iremos iniciar o **estudo do Logaritmo**.

1 - Definição

Dados dois números reais positivos a e x , com $a > 0$ e $a \neq 1$, o **logaritmo** de x na base a é igual ao expoente y ao qual a base a deve ser elevada para se chegar a x como resultado.

Se $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$, temos que:

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x, \text{ onde:}$$

- a → base do logaritmo
- x → logaritmando
- y → logaritmo

Isto é, o **logaritmo** de x na base a é a solução de y na equação $a^y = x$.

Observe que o Logaritmo é uma operação matemática intrinsecamente ligada à potenciação. A ideia do logaritmo é **reverter a operação de exponenciação**.

Sempre que nos depararmos com logaritmo estaremos mentalmente trabalhando com expoentes. Veremos mais a frente (na parte de função) que **a função logarítmica é a inversa da função exponencial**.

Inicialmente, esta definição pode parecer um pouco confusa ou difícil. No decorrer da aula, com inúmeros exemplos e questões de provas, tudo ficará mais claro.



TOME NOTA!

$$\log_a x = y$$

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
Condição de existência: $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$

base (pointing to a) *logaritmando* (pointing to x)

A pergunta que sempre devemos fazer é: "**Devemos elevar a base a qual expoente para se obter o *logaritmando*?**"

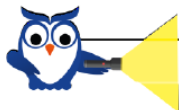
Vamos voltar no nosso exemplo do começo da aula.

Estávamos interessados em resolver a seguinte igualdade:

$$3^y = 5$$

Aplicando a definição de logaritmo, podemos calcular o valor de y :

$$3^y = 5 \rightarrow y = \log_3 5$$



ESCLARECENDO

Observe que iremos **trabalhar constantemente** com a **definição** e também com o **sentido inverso da definição**. É **importante** que você esteja confortável para trabalhar tanto em um sentido quanto no outro.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: $\log_2 8 = y$

Lembre-se sempre da pergunta: "**Devemos elevar a base a qual expoente para se obter o logaritmando?**"

Nesse caso estaríamos perguntando: 2 elevado a que número dará 8? Sabemos que 2 ao cubo é igual a 8. Logo,

$$\log_2 8 = 3 \text{ , pois } 2^3 = 8$$

Exemplo 2: $\log_7 7 = y$

7 elevado a 1 é igual a 7. Logo,

$$\log_7 7 = 1 \text{ , pois } 7^1 = 7$$

Exemplo 3: $\log_{1.050.875} 1 = y$

Um milhão cinqüenta mil oitocentos e setenta e cinco elevado a que número resultará em um?

Como vimos na aula de potenciação, qualquer número elevado a 0 resultará em 1. Logo,

$$\log_{1.050.875} 1 = 0 \text{ , pois } 1.050.875^0 = 1$$

Exemplo 4: $\log_2 \frac{1}{4} = y$

2 elevado a qual número resultará em 1/4?

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2 \text{ , pois } 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

E professor, esse nível "básico" cai em concurso? Com certeza. Iremos trabalhar constantemente com a definição de logaritmo em todos os níveis da aula de hoje.

Vejamos uma questão cobrada no concurso da IF-SP.

(IF SP - 2012) Se $\log_x 243 = 5$, então o valor de x deve ser:

- a) 2
- b) 4
- c) 1
- d) 3

e) 0

Comentários:

Observe que a banca nos questiona o valor da base. Até então estávamos sempre calculando o resultado de um logaritmo.

Todavia, a operação e a definição continuam as mesmas. Vejamos:

$$\log_x 243 = 5 \rightarrow x^5 = 243$$

$$x = 3$$

Gabarito: Alternativa D

2 - Consequências da definição

Devemos ter em mente algumas igualdades decorrentes das **consequências da definição**.

1. Se o logaritmando for igual a base, o **logaritmo será igual a 1**. Vimos isto no exemplo 2.

$$\log_a a = 1$$

Pois, **qualquer número elevado a 1 é igual a ele mesmo**.

2. O logaritmo de 1 (unidade) em qualquer base **é igual a 0**. Analisamos no exemplo 3.

$$\log_a 1 = 0$$

Pois, **qualquer número elevado a 0 é igual a 1**.

3. A potência de base a e expoente $\log_a x$ será **igual a x** .

$$a^{\log_a x} = x$$

4. Se o logaritmo for igual a base e estiver elevado a um expoente x , o **logaritmando será o próprio x** .

$$\log_a a^x = x$$

5. Dois logaritmos em uma mesma base são iguais, se e somente se, **os logaritmandos também forem iguais**.

$$\log_a x = \log_a y \leftrightarrow x = y$$

Estas consequências da definição serão usadas constantemente nas resoluções dos problemas. Então, **decore!**



Consequências da definição

$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$	$a^{\log_a x} = x$	$\log_a a^x = x$	$\log_a x = \log_a y \leftrightarrow x = y$
----------------	----------------	--------------------	------------------	---

3 - Bases Especiais ou Particulares

Duas bases frequentemente são cobradas em provas. A base 10 e a base e .

1. Logaritmo na base 10.

É o que chamamos de logaritmo decimal. É o mais "comum" a ser usado.

Quando **não estiver explícita a base** do logaritmo em uma operação, entende-se que **a base é a decimal**.

$$\log x \rightarrow \log_{10} x$$

2. Logaritmo na base e .

O número de Euler (e) é uma constante matemática irracional e igual, aproximadamente, a 2,721.

O logaritmo de um número na base e tem a seguinte notação:

$$\log_e x \rightarrow \ln x$$

4 - Propriedades dos Logaritmos

Este tema é **MUITO cobrado** em prova. Praticamente todas as questões de logaritmos envolvem a aplicação de uma das propriedades abaixo.

Passarei as propriedades uma a uma com seu conceito e fórmula e ao final farei um **quadro resumo** com as notações que você **DEVE decorar**.

Iremos praticar também com **bastantes exemplos e questões de provas** para você entender como as bancas gostam de cobrar este assunto.

i. Logaritmo do Produto

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

Obs: Esta propriedade pode ser estendida para n fatores:

$$\log_a(x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \dots + \log_a x_n$$

ii. Logaritmo do Quociente

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

iii. Logaritmo da Potência

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p * \log_a x$$

iv. Base elevada a um expoente

Quando a **base** estiver elevada a um expoente, o logaritmo é igual ao **produto do inverso da base vezes o logaritmo**.

$$\log_{a^p} x = \frac{1}{p} * \log_a x$$



Propriedades dos Logaritmos

Propriedade	Fórmula	Conceito
Logaritmo do Produto	$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$	O logaritmo do produto é igual a soma de seus logaritmos
Logaritmo do Quociente	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	O logaritmo do quociente é igual a diferença dos seus logaritmos
Logaritmo da Potência	$\log_a x^p = p * \log_a x$	O logaritmo de uma potência é igual a esta potência vezes o logaritmo
Base elevada a um expoente	$\log_{a^p} x = \frac{1}{p} * \log_a x$	Quando a base estiver elevada a um expoente, o logaritmo é igual ao produto do inverso da base vezes o logaritmo



TOME NOTA!

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta **confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade**.

Em diversos exercícios será exigida a manipulação das soluções com a "volta" de uma das propriedades.

Vejamos alguns exemplos de aplicação dessas propriedades.

Estes exercícios buscam sempre uma "manipulação" algébrica dos numerais. Fique atento às contas. Irei sempre colocar o passo a passo para você acompanhar.

Exemplo 4: Dado que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule os seguinte logaritmos:

a) $y = \log 6$

Aplicaremos a propriedade do **logaritmo do produto** para reescrever este logaritmo e calcular seu valor.

$$y = \log 6$$

$$y = \log(2 * 3)$$

$$y = \log 2 + \log 3$$

$$y = a + b \rightarrow \log 6 = a + b$$

b) $y = \log 9$

Aplicaremos a propriedade do **logaritmo da potência** e calcularemos o valor do logaritmo.

$$y = \log 9$$

$$y = \log 3^2$$

$$y = 2 * \log 3$$

$$y = 2 * b \rightarrow \log 9 = 2b$$

c) $y = \log 1,5$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do quociente**:

$$y = \log 1,5$$

$$y = \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \log 3 - \log 2$$

$$y = b - a \rightarrow \log 1,5 = b - a$$

d) $y = \log 15$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do produto**:

$$y = \log 15$$

$$y = \log(10 * 1,5)$$

$$y = \log 10 + \log 1,5$$

$$y = 1 + (b - a) \rightarrow \mathbf{\log 15 = 1 + b - a}$$

$$e) \ y = \log \sqrt{3}$$

Aplicando a propriedade do **logaritmo da potência**:

$$y = \log \sqrt{3}$$

$$y = \log 3^{1/2}$$

$$y = \frac{1}{2} * \log 3$$

$$y = \frac{1}{2} * b \rightarrow \mathbf{\log \sqrt{3} = \frac{b}{2}}$$

$$f) \ y = \log 5$$

Aplicando a propriedade do **logaritmo do quociente**:

$$y = \log 5$$

$$y = \log \left(\frac{10}{2} \right)$$

$$y = \log 10 - \log 2$$

$$y = 1 - a \rightarrow \mathbf{\log 5 = 1 - a}$$

$$g) \ y = \log_{100} 2$$

Aplicando a propriedade da **base elevada a um expoente**:

$$y = \log_{100} 2$$

$$y = \log_{10^2} 2$$

$$y = \frac{1}{2} * \log_{10} 2$$

$$y = \frac{1}{2} * \log 2$$

$$y = \frac{1}{2} * a \rightarrow \log_{100} 2 = \frac{a}{2}$$

h) $y = \log 36$

Aplicando simultaneamente as propriedades do **logaritmo do produto** e do **logaritmo da potência**:

$$y = \log 36$$

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

$$y = 2 * \log 2 + 2 * \log 3$$

Conseguiu entender esta última passagem?

Fique atento! Pois, na grande parte dos exercícios, pode ser que tenhamos de **usar propriedades em conjunto**. Observe passo a passo a resolução acima.

$$y = \log 36$$

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

Primeiro vamos aplicar a propriedade do **logaritmo do produto**:

$$y = \log(2^2 * 3^2)$$

$$y = \log 2^2 + \log 3^2$$

Agora, aplicaremos a propriedade do **logaritmo da potência** para ambos os fatores:

$$y = \log 2^2 + \log 3^2$$

$$y = 2 * \log 2 + 2 * \log 3$$

$$y = 2 * a + 2 * b \rightarrow \log 36 = 2a + 2b$$

Exemplo 5: Se $\log_2 x = k$, quanto vale $y = \log_{16} x$?

Primeiro vamos "manipular" algebricamente o número 16 para encontrá-lo em função do número 2.

$$y = \log_{16} x$$

$$y = \log_{2^4} x$$

Aplicaremos agora a **propriedade da base elevada a um expoente**.

$$y = \log_{2^4} x$$

$$y = \frac{1}{4} * \log_2 x$$

$$y = \frac{1}{4} * k \rightarrow \log_{16} x = \frac{k}{4}$$

Exemplo 6: A soma dos logaritmos de três números na base 3 é igual a 4. Determine o produto desses números.

O enunciado nos informa que a soma dos logaritmos de três números na base 3 é igual a 4.

$$\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = 4$$

Aplicaremos o "**sentido contrário**" da propriedade do **logaritmo produto**.

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade.

$$\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = 4$$

$$\log_3 (x * y * z) = 4$$

$$(x * y * z) = 3^4 \rightarrow (x * y * z) = 81$$

5 - Mudança de Base

Em algumas situações pode ser necessária a **conversão do logaritmo para uma única base conveniente**.

As propriedades estudadas acima são correlacionadas a logaritmos com a mesma base.

Nestes casos iremos proceder com a **mudança de base do logaritmo**.

Dados a, x e b , números reais positivos e a e $b \neq 1$, o logaritmo de x na base a pode ser escrito da seguinte forma:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Acerca dessa mudança de base, há **duas observações importantes**:

1. Esta propriedade também pode ser representada da seguinte forma:

$$\log_a x = \log_b x * \log_a b$$

2. Se a e x são números reais positivos e diferentes de 1, temos:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

Exemplo 7: Dado que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $y = \log_3 2$

Aplicando a **mudança para a base 10**:

$$y = \log_3 2$$

$$y = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$y = \frac{a}{b} \rightarrow \log_3 2 = \frac{a}{b}$$

b) $y = \log_2 3$

Poderíamos resolver igual a questão acima (aplicando a mudança para a base 10) ou aplicar a segunda observação estudada que nos diz:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

No exemplo acima calculamos $\log_3 2$, então:

$$y = \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$

$$y = \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

$$y = \frac{b}{a} \rightarrow \log_2 3 = \frac{b}{a}$$

$$c) y = \log_6 5$$

Aplicando a **mudança para a base 10**:

$$y = \log_6 5$$

$$y = \frac{\log 5}{\log 6}$$

Esses logaritmos acima foram calculados nos exemplos $4f$ e $4a$. Veja que os exemplos começam a **misturar diversos conceitos** de logaritmos.

Neste caso, trabalharíamos com mudança de base, propriedade do logaritmo do produto e propriedade do logaritmo do quociente.

Substituindo os valores já calculados teremos:

$$y = \frac{\log 5}{\log 6}$$

$$y = \frac{1 - a}{a + b} \rightarrow \log_6 5 = \frac{1 - a}{a + b}$$

Iremos resolver, agora, uma **série de exercícios de concurso público**. Tenha decoradas as propriedades dos logaritmos e o entendimento do conceito da definição e das consequências da definição.

Os exercícios serão resolvidos passo a passo e você entenderá a maneira como as bancas gostam de cobrar este tema.



(FUNDATEC - 2019) Sabendo que o valor de $\log 5 = 0,698$, o valor do $\log 50$ será:

- a) 1,698
- b) 2,698
- c) 3,698
- d) 4,698
- e) 10,698

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar a "volta" da **propriedade do logaritmo do produto** para encontrarmos o seu valor.

$$y = \log 50$$

$$y = \log(5 * 10)$$

$$y = \log 5 + \log 10$$

$$y = 0,698 + 1 \rightarrow y = 1,698$$

Gabarito: Alternativa **A**

(Alternative - 2016) Calculando o logaritmo de 625 na base 5, obtem-se:

- a) 4
- b) 8
- c) 2
- d) 3
- e) 5

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar a **propriedade do logaritmo da potência** para encontrar seu valor.

$$y = \log_5 625$$

$$y = \log_5 5^4$$

$$y = 4 * \log_5 5 = 4 * 1 \rightarrow y = 4$$

Gabarito: Alternativa **A**

(FGV - 2019) Sabe-se que $\log_3 x + \log_3 y = 4$. O valor do produto $(x * y)$ é igual a:

- a) 12
- b) 24
- c) 36
- d) 54
- e) 81

Comentários:

Vamos aplicar o "caminho inverso" da **propriedade do logaritmo do produto**.

$$\log_3 x + \log_3 y = 4$$

$$\log_3(x * y) = 4$$

$$(x * y) = 3^4$$

$$(x * y) = 81$$

Gabarito: Alternativa E

(ESAF - 2014) Sabendo-se que $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, calcule o valor da expressão

$$\log 20 + \log 5$$

- a) 5
- b) 4
- c) 1
- d) 2
- e) 3

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar o sentido inverso da **propriedade do logaritmo do produto** para encontrar nossa resposta.

$$y = \log 20 + \log 5$$

$$y = \log(20 * 5)$$

$$y = \log 100 \rightarrow y = 2$$

Gabarito: Alternativa D

(COTEC - 2016) Considere a um número real positivo. Se $\log a = 3$, então $\log(a^2/10)$ vale:

- a) 8
- b) 9
- c) 7
- d) 5

Comentários:

A sistemática de resolução é a mesma. Chamaremos de y o valor que queremos encontrar e aplicando as **propriedades do logaritmo** calcularemos seu valor.

$$y = \log\left(\frac{a^2}{10}\right)$$

Aplicando a **propriedade do logaritmo do produto e do logaritmo da potência** e calculando y :

$$y = \log\left(\frac{a^2}{10}\right)$$

$$y = \log a^2 - \log 10$$

$$y = 2 * \log a - 10$$

$$y = 2 * 3 - 1 \rightarrow y = 5$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CESGRANRIO - 2011) Se $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, então o valor de n que tal que $\log n = 3 - \log 2$ é:

- a) 2.000
- b) 1.000
- c) 500
- d) 100
- e) 10

Comentários:

Vamos desenvolver a igualdade aplicando o caminho inverso da **propriedade do logaritmo do produto**.

$$\log n = 3 - \log 2$$

$$\log n + \log 2 = 3$$

$$\log(n * 2) = 3$$

$$\log(2n) = 3$$

$$2n = 10^3$$

$$2n = 1.000 \rightarrow n = 500$$

Gabarito: Alternativa **C**

(NC UFPR - 2014) A expressão $\log_{10} 8 + \log_{10} 2$ é equivalente a:

- a) $\log_{10} 10$
- b) $8 * \log_{10} 2$
- c) $2 * \log_{10} 8$
- d) $2 * \log_{10} 4$
- e) $\log_{10} 2$

Comentários:

Vamos chamar o valor que queremos encontrar de y e aplicar as propriedades que estudamos para encontrar uma resposta que seja equivalente à expressão fornecida no enunciado.

$$y = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$$

Aplicando o "sentido contrário" da **propriedade do logaritmo do produto**:

$$y = \log_{10} 8 + \log_{10} 2$$

$$y = \log_{10}(8 * 2)$$

$$y = \log_{10} 16$$

Perceba que não há gabarito para este resultado. Vamos manipular algebricamente este valor para chegarmos ao gabarito.

Reescrevendo y :

$$y = \log_{10} 16$$

$$y = \log_{10} 4^2$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência:

$$y = \log_{10} 4^2 \rightarrow y = 2 * \log_{10} 4$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CURSIVA - 2015) Sabendo que $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$, qual o valor de $\log 12$?

- a) 1,907
- b) 1,070
- c) 1,079
- d) 1,790

Comentários:

Iremos chamar o valor de $\log 12$ de y e aplicaremos a propriedade do logaritmo do produto e do logaritmo da potência para calcular o gabarito.

$$y = \log 12$$

$$y = \log(4 * 3)$$

$$y = \log(2^2 * 3)$$

$$y = \log 2^2 + \log 3 \rightarrow y = 2 * \log 2 + \log 3$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado e calculando y teremos:

$$y = 2 * \log 2 + \log 3$$

$$y = 2 * 0,301 + 0,477$$

$$y = 0,602 + 0,477 \rightarrow y = 1,079$$

Gabarito: Alternativa C

(COTEC - 2020) Considere $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$. Nessas condições pode-se afirmar que $\log_{100} 72$ é igual a:

- a) $\frac{a+b}{2}$
- b) $\frac{a^2+b^2}{2}$
- c) $\frac{2a+3b}{2}$
- d) $\frac{3a+2b}{2}$
- e) $2a + 3n$

Comentários:

Esta questão aborda de forma bem completa as propriedades que acabamos de aprender.

Vamos chamar o valor de $\log_{100} 72$ de y e desenvolver até conseguirmos reduzir nossa resposta em função de $\log 2$ e de $\log 3$.

$$y = \log_{100} 72$$

$$y = \log_{10^2} 72$$

Aplicaremos a **propriedade da base elevada a um expoente**:

$$y = \log_{10^2} 72 \rightarrow y = \frac{1}{2} * \log 72$$

Escrevendo agora o número 72 em função dos números 2 e 3.

$$y = \frac{1}{2} * \log(2^3 * 3^2)$$

Aplicando a **propriedade do logaritmo do produto**.

$$y = \frac{1}{2} * \log(2^3 * 3^2) \rightarrow y = \frac{1}{2} * (\log 2^3 + \log 3^2)$$

Utilizaremos a **propriedade do logaritmo da potência** e iremos calcular y em função de a e b .

$$y = \frac{1}{2} * (\log 2^3 - \log 3^2) \rightarrow y = \frac{1}{2} * (3 * \log 2 + 2 * \log 3)$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado teremos y igual a:

$$y = \frac{1}{2} * (3 * \log 2 + 2 * \log 3)$$

$$y = \frac{1}{2} * (3 * a + 2 * b) \rightarrow y = \frac{3a + 2b}{2}$$

Gabarito: Alternativa **D**

(CETREDE - 2019) Marina afirmou para Cláudio que $2^x = 6$. Quanto será $\log_2 3$.

- a) $x + 3$
- b) $x - 1$
- c) 2
- d) $x - 2$
- e) $4x$

Comentários:

Usando a definição de logaritmo, sabemos que:

$$2^x = 6 \rightarrow x = \log_2 6$$

Desenvolveremos o resultado para calcular em função de $\log_2 3$. Acompanhe.

$$x = \log_2 6$$

$$x = \log_2(2 * 3)$$

Vamos aplicar a **propriedade do logaritmo do produto** e encontrar o valor questionado pela banca.

$$x = \log_2(2 * 3)$$

$$x = \log_2 2 + \log_2 3$$

$$x = 1 + \log_2 3$$

$$\log_2 3 = x - 1$$

Gabarito: Alternativa **B**

(QUADRIX Adaptada - 2018) Uma colônia de bactérias se prolifera e o número de indivíduos para cada instante $t > 0$ é dado por:

$$N(t) = 2e^{kt}$$

Em que k é uma constante positiva. Sabe-se que, no instante $t = 4$, o número de bactérias é igual a 162.

Com base nesse caso hipotético, o valor de k e o número de bactérias no instante $t = 8$ é igual a:

- a) $\ln 3$
- b) $\ln 5$
- c) $\ln 4$
- d) $\ln 7$
- e) $\ln 2$

Comentários:

O enunciado nos fornece a igualdade e uma condição de contorno para calcularmos k .

Observe que quando $t = 4 \rightarrow N(t) = 162$.

Vamos substituir estes valores na igualdade e calcular o valor de k .

$$N(t) = 2e^{kt}$$

$$162 = 2e^{4k}$$

$$e^{4k} = \frac{162}{2}$$

$$e^{4k} = 81$$

Aplicando a **definição de logaritmo**:

$$e^{4k} = 81 \rightarrow 4k = \ln 81 \rightarrow k = \frac{1}{4} \ln 81$$

Aplicaremos a "volta" da **propriedade do logaritmo da potência**.

É muito **IMPORTANTE** que você decore essas propriedades e também se sinta confortável para trabalhar nos dois sentidos da igualdade.

$$k = \frac{1}{4} \ln 81$$

$$k = \ln 81^{1/4} = \ln \sqrt[4]{81} \rightarrow k = \ln 3$$

Gabarito: Alternativa **A**

(NC UFPR - 2017) Considerando que $\log_{10} 5 = 0,7$, assinale a alternativa que apresenta o valor de $\log_5 100$:

- a) 0,35
- b) 0,50
- c) 2,85
- d) 7,00
- e) 70,00

Comentários:

Vamos chamar de y o valor de $\log_5 100$ e desenvolver a igualdade:

$$y = \log_5 100$$

Aplicaremos a mudança para a base 10.

$$y = \log_5 100$$

$$y = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 5}$$

$$y = \frac{2}{0,7} \rightarrow y = 2,85$$

Gabarito: Alternativa C

(FCC - 2015) O valor da expressão:

$$y = \log_2 16 + \log_4 8 + \log_8 4$$

é igual a:

- a) 5
- b) $23/2$
- c) $37/6$
- d) $5/4$
- e) $41/8$

Comentários:

Vamos aplicar a mudança de base nos dois últimos fatores e calcular o valor da expressão:

$$y = \log_2 16 + \log_4 8 + \log_8 4$$

$$y = \log_2 16 + \frac{\log_2 8}{\log_2 4} + \frac{\log_2 4}{\log_2 8}$$

$$y = 4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \quad , \quad MMC(2,3) = 6$$

$$y = \frac{24 + 9 + 4}{6} \rightarrow y = \frac{37}{6}$$

Gabarito: Alternativa C

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1 - Definição

A função logarítmica de base **a** , onde **$a > 0$** e **$a \neq 1$** é definida por:

$$f(x) = \log_a x$$

Sendo uma função f de R_+^* em R que associa cada número x a seu respectivo valor $\log_a x$.

$$f: R_+^* \rightarrow R \quad , \quad x \rightarrow \log_a x$$



TOME NOTA!

Quando trabalhamos com funções é comum usarmos como **notação $f(x)$ ou y** . Então, sempre que aparecer um desses dois termos, saibam que são coincidentes.

$$f: R_+^* \rightarrow R \quad f(x) = \log_a x \quad \text{ou} \quad y = \log_a x$$

2 - Domínio

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando** ser **maior que 0**.

Lembram-se da condição de existência do logaritmo visto na primeira parte da aula? Ela será o **domínio** da nossa função logarítmica.



$$\log_a x = f(x) \quad \text{Condição de existência: } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ e } x > 0$$

base logaritmando

Exemplo 1: Encontre o domínio das funções logarítmicas abaixo:

a) $f(x) = \log_3(x - 8)$

Estudamos acima que a condição de existência é dada por duas condições. A primeira é a base ser maior que 0 e diferente de 1. Neste exemplo a base é igual a 3 e já satisfaz esta condição.

A segunda condição é o logaritmando ser maior que 0. Vamos determinar os valores de x para esta condição.

$$x - 8 > 0$$

$$x > 8$$

Sendo assim, o domínio pode ser representado por:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$$

b) $f(x) = \log_{(x-3)} 8$

Perceba que neste exemplo o logaritmando é maior que 0. O que satisfaz uma das nossas condições de existência.

Todavia, precisamos encontrar o valor de x para que a base possa ser maior que 0 e também diferente de 1.

$$x - 3 > 0 \quad \text{e} \quad x - 3 \neq 1$$

$$x > 3$$

$$x \neq 4$$

Observe que o domínio é dado pelos valores de $x > 3$. Porém, x tem que ser também diferente de 4. Ou seja, x é igual a todos os valores maiores do que 3, menos o valor 4.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ e } x \neq 4\} \text{ ou } D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \neq 4\}$$

Podemos ainda representar os valores no eixo Real das abscissas.



O intervalo é aberto em 3 pois queremos os números maiores que 3 e não maiores ou iguais a 3.

$$c) f(x) = \log_2(x^2 - 9x + 14)$$

Perceba que a base já é maior que 0 e diferente de 1, o que satisfaz uma das duas condições de existência.

A segunda é o logaritmando ser maior que 0.

$$x^2 - 9x + 14 > 0$$

Lembra-se da aula de inequações? Essa é uma boa hora para revisar, pois vamos usar exaustivamente o estudo das inequações para encontrar o domínio das funções logarítmicas.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

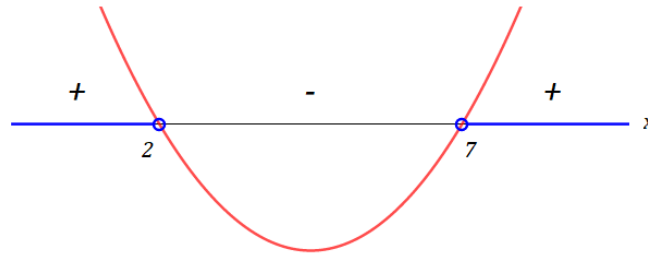
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 * 1 * 14}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{9 + 5}{2} \rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = \frac{9 - 5}{2} \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

De posse das raízes, vamos proceder com o estudo da função quadrática na reta.

A função é um **parábola com concavidade voltada para cima** e corta o eixo x nas raízes 2 e 7. Como queremos os valores maiores que 0, o intervalo é aberto nas raízes.



Estamos em busca dos valores maiores que 0, isto é, positivos. Os valores positivos encontram-se a esquerda de 2 e a direita de 7.

Representando o domínio na reta teremos:



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ e } x > 7\} \text{ ou } x =]-\infty, 2[\cup]7, +\infty[$$

Exemplo 2: Veremos agora, como exemplo de uma questão de concurso, no maior nível que a banca pode complicar. Faremos o estudo simultâneo da base com o logaritmando.

(CRS / PMMG Aspirante – 2010) O domínio da função:

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

está no intervalo:

- a) $]7, +\infty[$
- b) $] -2, 7[$
- c) $] -1, +\infty[$
- d) $]0, +\infty[$

Comentários:

O enunciado nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona o **domínio** desta função.

O **domínio** de uma função representa o conjunto dos **possíveis valores de x** onde a função é definida. Na função logarítmica o domínio é composto por duas condições.

- ✓ A primeira é a **base do logaritmo** ser **maior que 0** e também **diferente de 1**.
- ✓ A segunda é o **logaritmando ser maior que 0**.

$$f(x) \log_a x \rightarrow x > 0 \text{ e } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Vamos então dividir nosso problema em dois.

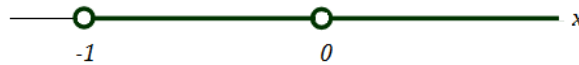
A primeira parte vai ser encontrar a condição de existência para a base $a > 0 \text{ e } a \neq 1$. E a segunda parte, encontrar o intervalo de existência para o logaritmando $x > 0$.

- (I) – base maior que zero e diferente de 1.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1 \rightarrow x > -1 \text{ e } x \neq 0$$

Representando os valores de x na reta:



Observe que representamos na reta os valores maiores que -1 (intervalo aberto) e utilizamos a representação também aberta em 0, pois o como vimos $x > -1 \text{ e } x \neq 0$.

- (II) – Logaritmando maior do que zero.

$$f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 5x - 14)$$

$$x^2 - 5x + 14 > 0$$

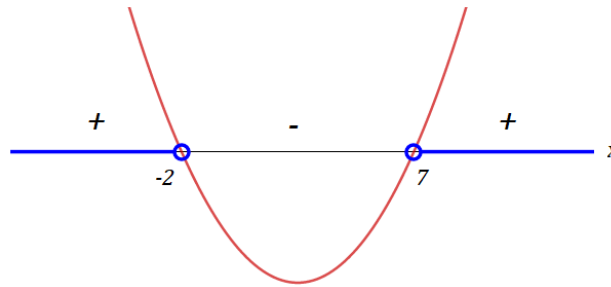
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 1 * (-14)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

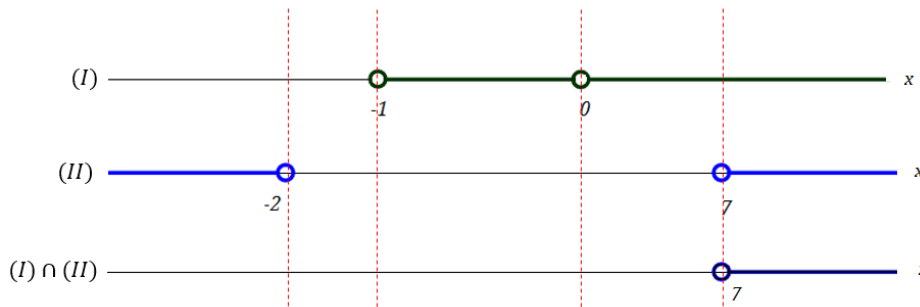
$$\frac{5 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+9}{2} \rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = \frac{5-9}{2} \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

Fazendo o estudo da inequação na reta:



Perceba que queremos os valores de x onde a função é maior do que zero, isto é, a função é positiva. O intervalo aberto em -2 e também em 7 deve-se ao fato que queremos os valores apenas maiores do que zero e não maiores e iguais a zero.

Vamos agora fazer a interseção da condição (I) com a condição (II).



A interseção será determinada pelo intervalo:

$$]7, +\infty[$$

Gabarito: Alternativa A

3 - Imagem

A **imagem** de uma função é representada pelos **possíveis valores de y ou $f(x)$** resultantes da aplicação de x na lei de formação da função.

A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**. A imagem pode ser negativa, positiva ou até mesmo o zero.



A **função logarítmica** apresenta como **imagem todos os números reais**.

$$I = \mathbf{R} \text{ ou } I =]-\infty, +\infty[$$

Exemplo 3: Observe esta questão de concurso público elaborada pela FUNDATEC e veja como o tema foi cobrado na prova.

(FUNDATEC – 2019) O conjunto imagem da função $f(x) = \log_2 x$.

- a) $[0, 1]$
- b) $[1, +\infty]$
- c) $[-\infty, 1]$
- d) $(-\infty, +\infty)$
- e) $\emptyset$

Comentários:

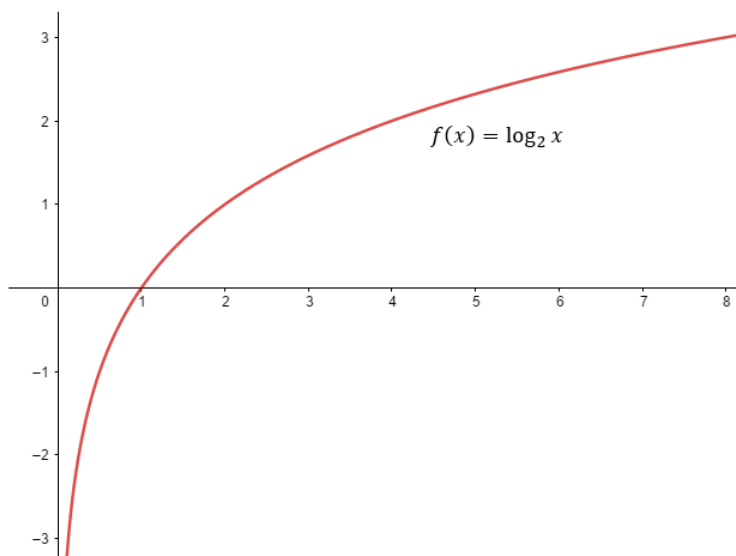
Como vimos acima, bastava saber o conceito sobre a Imagem da função logarítmica para responder a questão e garantir seu ponto na prova.

A imagem da função logarítmica é dada pelo conjunto dos números Reais. Logo:

$$I = \mathbb{R}$$

$$I = (-\infty, +\infty)$$

E o gráfico da função (que será estudado mais a frente) será:



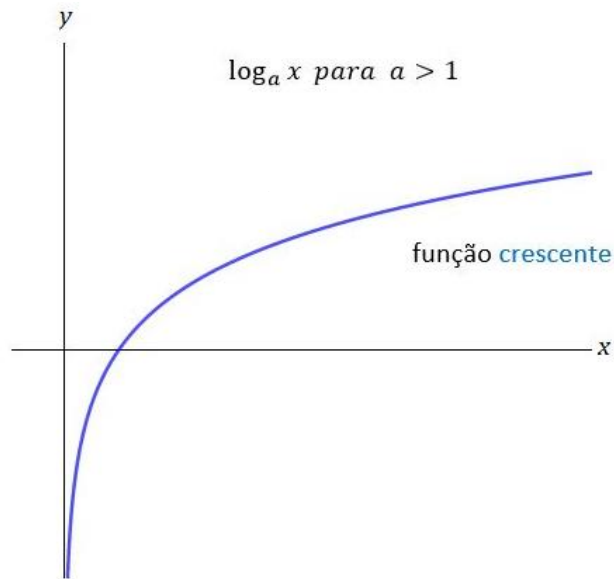
Gabarito: Alternativa D

4 – Gráfico e Comportamento

O gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ pode apresentar dois comportamentos distintos a **depend**er do valor da base a .

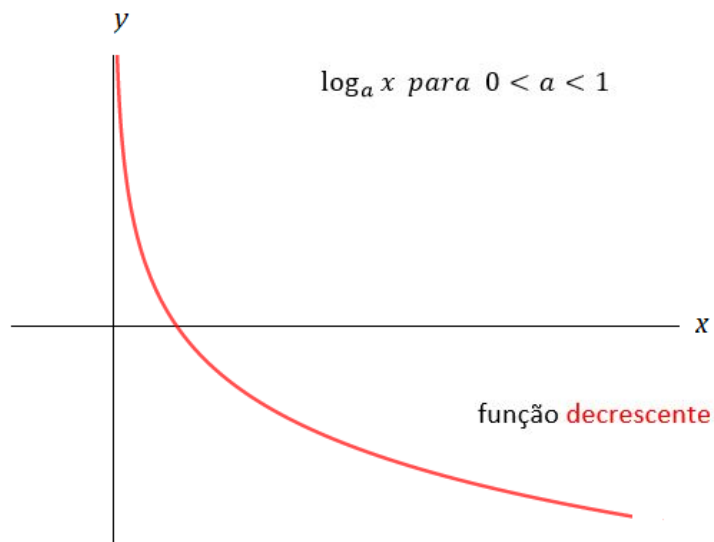
1. $a > 1$

Quando a **base é maior que a unidade** a função logarítmica terá o seguinte comportamento:



2. $0 < a < 1$

Quando a **base estiver entre 0 e 1**, o comportamento da função será:





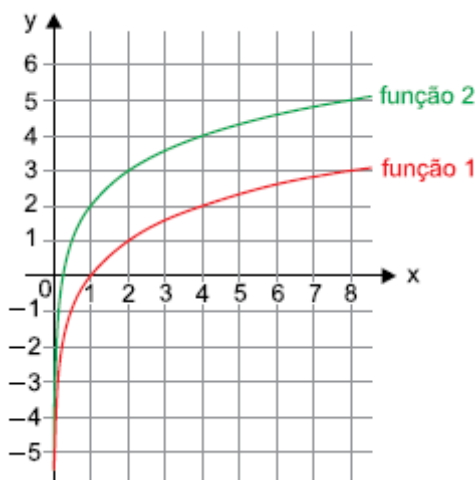
É muito **IMPORTANTE** que você saiba o **comportamento da função logarítmica** em função do valor da base. Conhecer como a função se comporta te ajudará demais na resolução dos exercícios.



- Se $a > 1$, a função será **crescente** e dado $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.
- Se $0 < a < 1$, a função será **decrescente** e dado $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Exemplo 3: Vejamos uma questão de concurso elaborada pela VUNESP em que você apenas precisava lembrar do comportamento da função logarítmica e assim garantiria seu ponto na prova.

(VUNESP – 2015) A imagem indica o gráfico das funções 1 e 2, ambas definidas para x real e maior do que zero.



De acordo com o gráfico, as funções 1 e 2 podem ser, respectivamente,

- a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$
- b) $y = 2^{x-2}$ e $y = 2^{2x}$
- c) $y = \sqrt{x} - 1$ e $y = \sqrt{x} + 1$
- d) $y = \log_2 x$ e $y = \log_2 4x$
- e) $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{4x}$

Comentários:

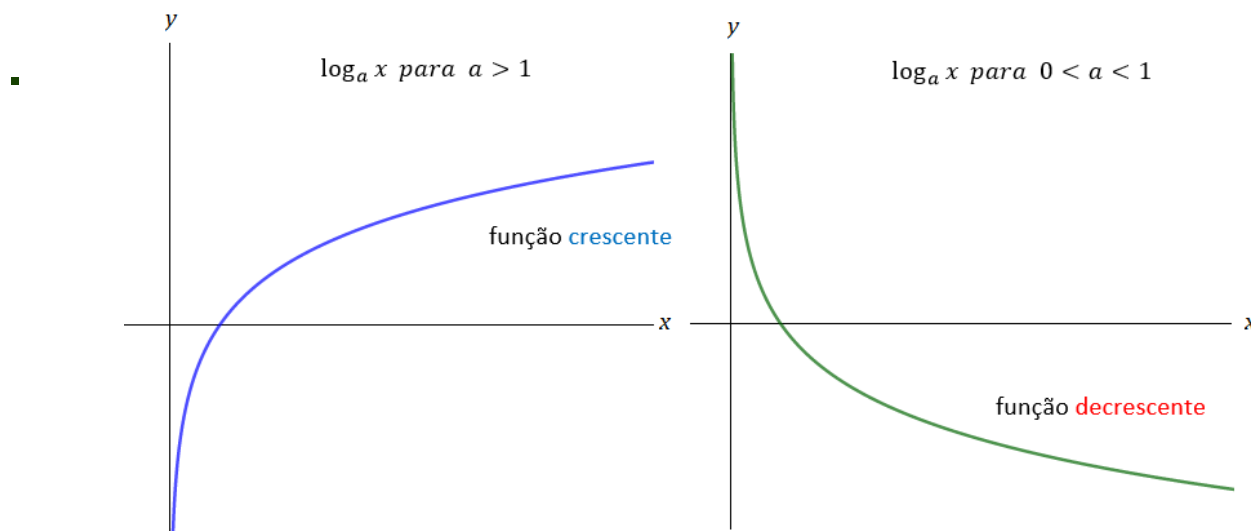
Esta questão nos mostra a importância de estar familiarizado com o gráfico das funções. Se você soubesse o comportamento da função, não precisaria fazer uma conta sequer na hora da prova.

Vamos recordar o comportamento do gráfico da função logarítmica em função da base do logaritmo. Lembrando que a base do logaritmo tem que ser maior que 0 e diferente de 1.

Em termos genéricos temos:

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

O gráfico da função pode assumir dois formatos. Vejamos:



Observe que os gráficos fornecidos pela banca possuem comportamento similar à **função crescente**, isto é, com **base maior que 1**.

A **única opção** dentre as alternativas que apresenta uma **função logarítmica com base maior que 1** é a letra D.

Gabarito: Alternativa **D**

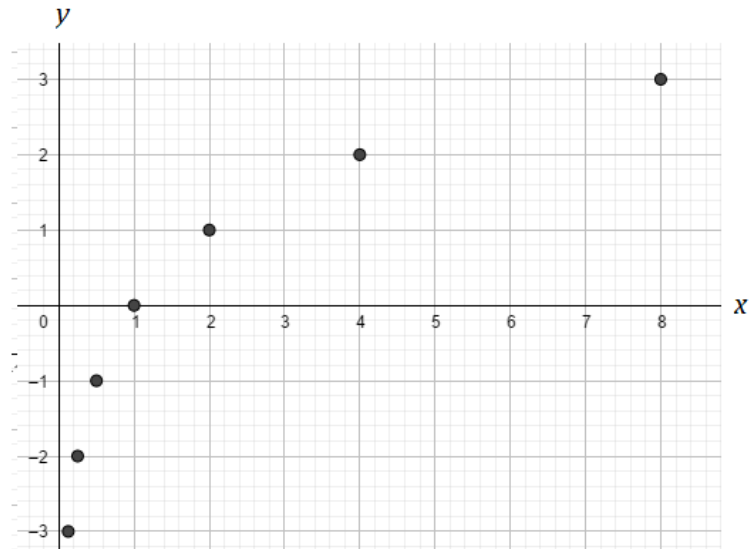
5 - Construindo o gráfico da função logarítmica

Para construir o gráfico da função iremos atribuir valores para x e calcular o valor da função neste ponto.

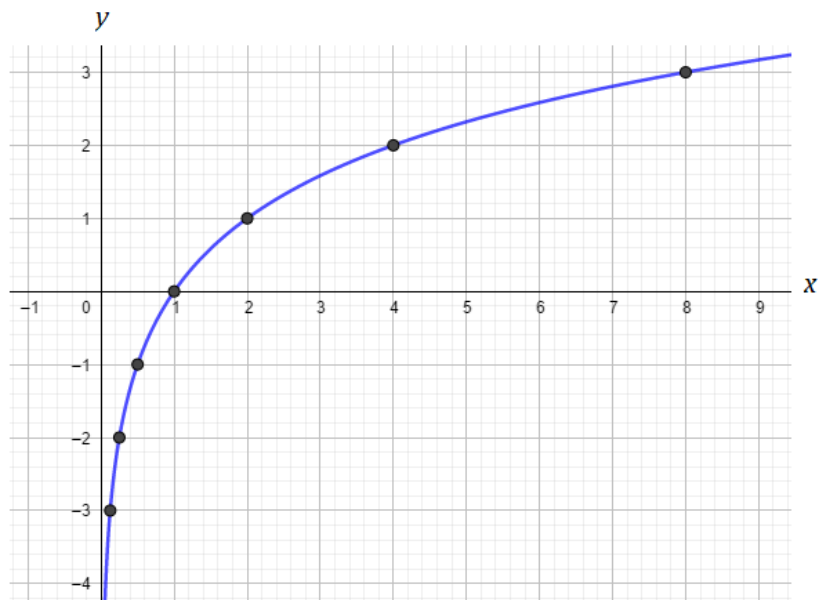
Exemplo 4: Construa o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Vamos **atribuir alguns valores para x** e **calcular o valor da função para o respectivo valor de x** .
Explicitaremos os pontos calculados no gráfico.

x	$f(x) = \log_2 x$
$1/8$	$f(1/8) = \log_2(1/8) = -3$
$1/4$	$f(1/4) = \log_2(1/4) = -2$
$1/2$	$f(1/2) = \log_2(1/2) = -1$
1	$f(1) = \log_2 1 = 0$
2	$f(2) = \log_2 2 = 1$
4	$f(4) = \log_2 4 = 2$
8	$f(8) = \log_2 8 = 3$



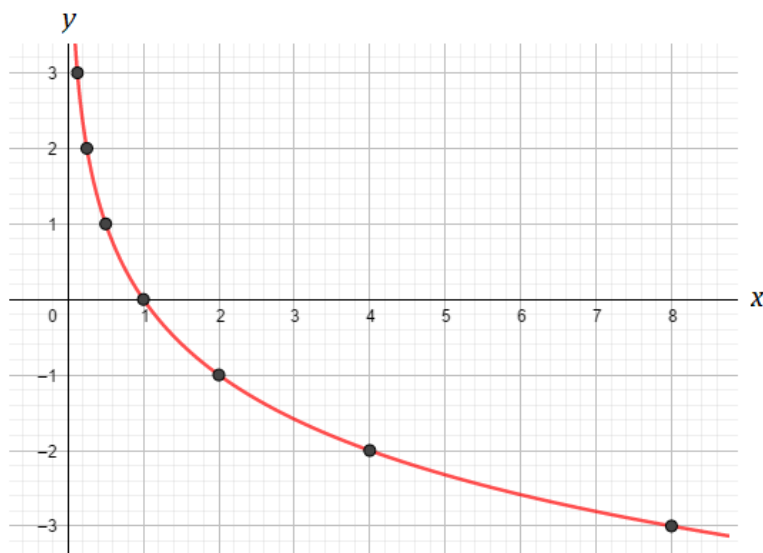
Por fim, traçamos a curva $f(x) = \log_2 x$



Exemplo 5: Construa o gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$.

A mecânica da construção será a mesma. Iremos **atribuir valores para x** e calcular o valor da função para o respectivo valor de x .

x	$f(x) = \log_{1/2} x$
$1/8$	$f(1/8) = \log_{1/2}(1/8) = 3$
$1/4$	$f(1/4) = \log_{1/2}(1/4) = 2$
$1/2$	$f(1/2) = \log_{1/2}(1/2) = 1$
1	$f(1) = \log_{1/2} 1 = 0$
2	$f(2) = \log_{1/2} 2 = -1$
4	$f(4) = \log_{1/2} 4 = -2$
8	$f(8) = \log_{1/2} 8 = -3$



Aprendemos como construir o gráfico de uma **função logarítmica**. A sistemática será sempre essa. **Atribuir valores para x** e calcular o valor da função nesse ponto x .

Então **fique atento**. A banca pode cobrar essa construção de duas maneiras.

1. A banca pode te dar uma função e perguntar qual gráfico, dentre as alternativas, é o gráfico da função dada ou,
2. O enunciado pode fornecer o gráfico e perguntar qual é a função que aquele gráfico representa.

E não se esqueça do **comportamento da função logarítmica em função do valor da base** do logaritmo. Essas informações serão de grande valia para a resolução dos exercícios.

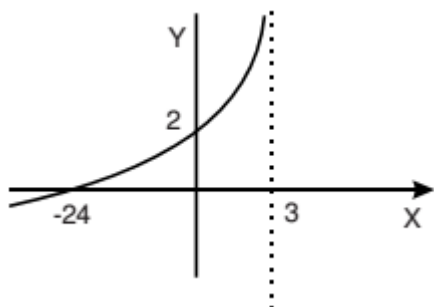
Vejamos um exemplo de cada maneira de como a prova pode abordar esse assunto.

Exemplo 6: A banca fornece a função e pergunta qual é o gráfico.

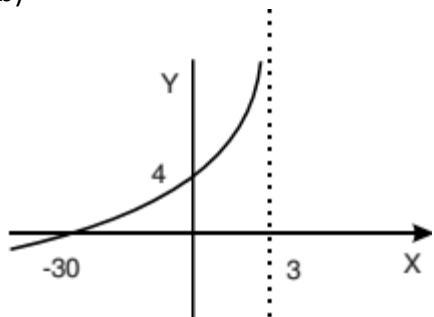
(UEPA – 2012) O gráfico que representa a função $f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$

Uma aplicação de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é:

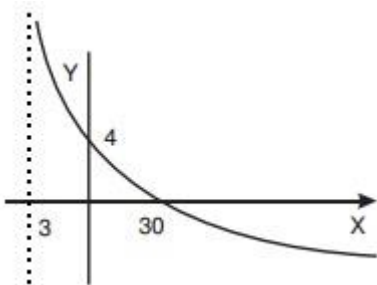
a)



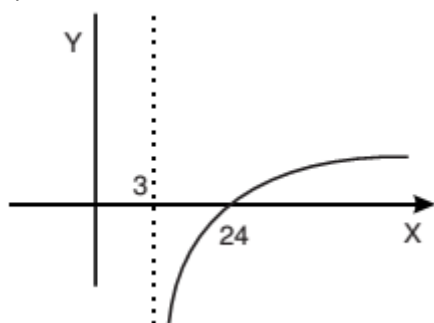
b)



c)



d)



Comentários:

A banca nos fornece a lei de formação da função logarítmica e nos questiona qual o gráfico que melhor a representa.

O **primeiro passo** é descobrir **em que ponto essa função intercepta o eixo das ordenadas**, isto é, em que ponto ela corta o eixo y . Lembrando que quando a função “corta” o eixo y , o valor de x é igual a zero.

- Para $x = 0$:

$$f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$f(0) = 3 - \log_3(3 - 0)$$

$$f(0) = 3 - \log_3 3 = 3 - 1 \rightarrow f(0) = 2$$

Ou seja, a função intercepta o eixo y no ponto $(0,2)$.

Perceba que só com essa informação já poderíamos marcar como gabarito a letra A.

Vamos agora descobrir o valor da função quando $y = 0$, isto é, quando a função intercepta o eixo x .

- Para $y = 0$:

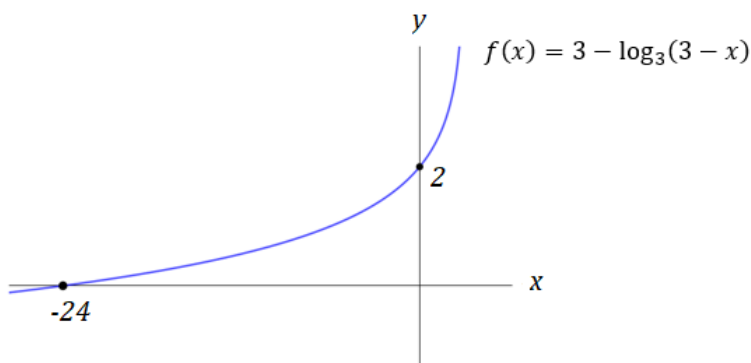
$$f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$0 = 3 - \log_3(3 - x)$$

$$\log_3(3 - x) = 3$$

$$3 - x = 3^3 \rightarrow 3 - x = 27 \rightarrow x = -24$$

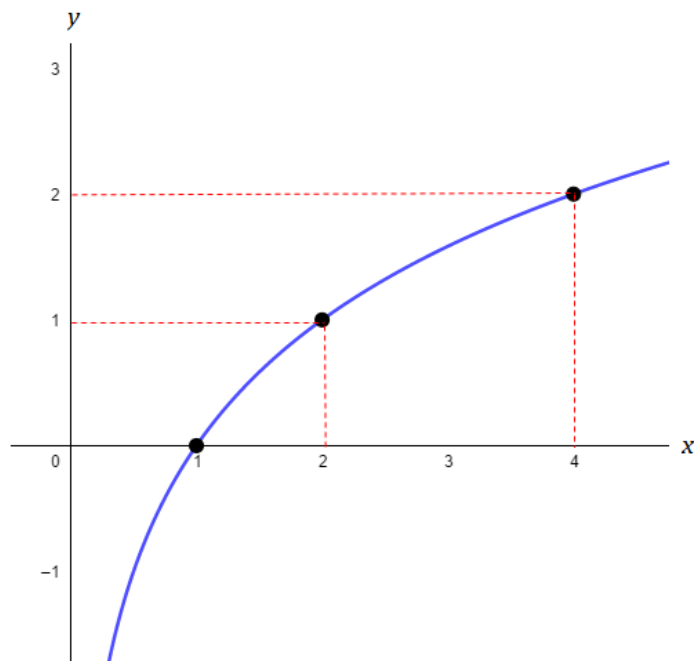
Então, o gráfico da função $f(x) = 3 - \log_3(3 - x)$ será igual a:



Gabarito: Alternativa **A**

Exemplo7: A banca fornece o gráfico e pergunta qual é a função.

(Gualimp - Adaptada / Prefeitura de Areal (RJ) – 2020) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo o gráfico está esboçado abaixo.



Qual é a lei de formação da função?

- a) $\log_2(x + 1)$
- b) $\log_2 x$
- c) $\log x$
- d) $\log_2 x + 1$

Comentários:

A lei de formação genérica de uma função logarítmica é igual a:

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

Precisamos então calcular a e b . Perceba que quando $x = 1 \rightarrow y = 0$. Iremos substituir estes valores na função e calcular o valor de b .

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$0 = \log_a(1 + b)$$

$$a^0 = 1 + b$$

$$1 = 1 + b \rightarrow \boxed{b = 0}$$

E para calcular o valor de a , substituiremos outro ponto pertencente a função. Observe que quando $x = 2 \rightarrow y = 1$. Sendo assim, o valor de a será igual a:

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$f(2) = \log_a(2 + 0)$$

$$1 = \log_a 2$$

$$a^1 = 2 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

Logo, a **lei de formação** será igual a:

$$f(x) = \log_a(x + b)$$

$$f(x) = \log_2(x + 0) \rightarrow \boxed{f(x) = \log_2 x}$$

Gabarito: Alternativa B

6 - Função Logarítmica x Função Exponencial

Em aulas anteriores, estudamos o comportamento da função exponencial. E na aula de hoje, o comportamento da função logarítmica.

Iremos entender agora a relação entre essas duas funções.

No início da aula explicamos que **o logaritmo está intrinsecamente ligado à exponenciação**. A ideia do logaritmo é reverter a operação de exponenciação.

Na aula de **função exponencial**, aprendemos que a função:

$$g(x) = a^x$$

é uma função bijetora, e como tal, **admite função inversa**.

Calculando a função inversa de $g(x)$, teremos:

$$g(x) = a^x$$

$$y = a^x$$

$$x = a^{y^{-1}} \rightarrow y^{-1} = \log_a x$$

Sendo assim, **a função logarítmica $f(x) = \log_a x$, como demonstrado, é a inversa da função exponencial $g(x) = a^x$** .

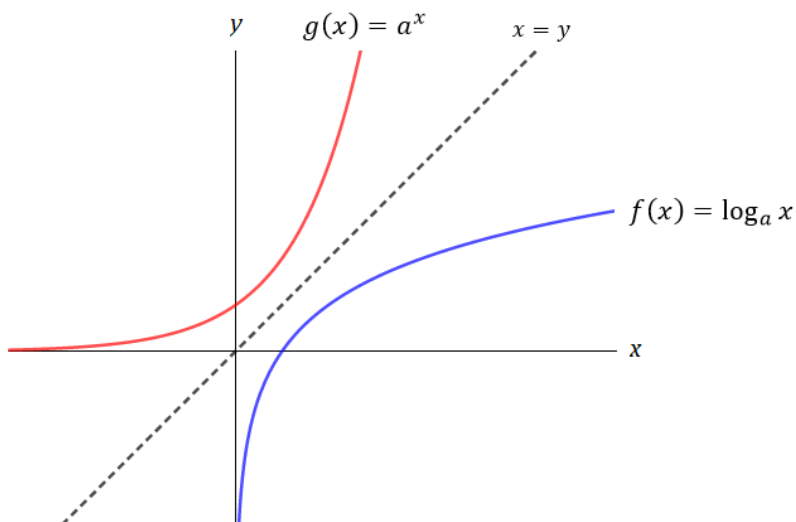
A função logarítmica $f(x)$ é inversa da função exponencial $g(x)$, ou seja, tais funções são simétricas em relação à reta xy (bissetriz dos quadrantes ímpares).

$$f(x) = \log_a x$$

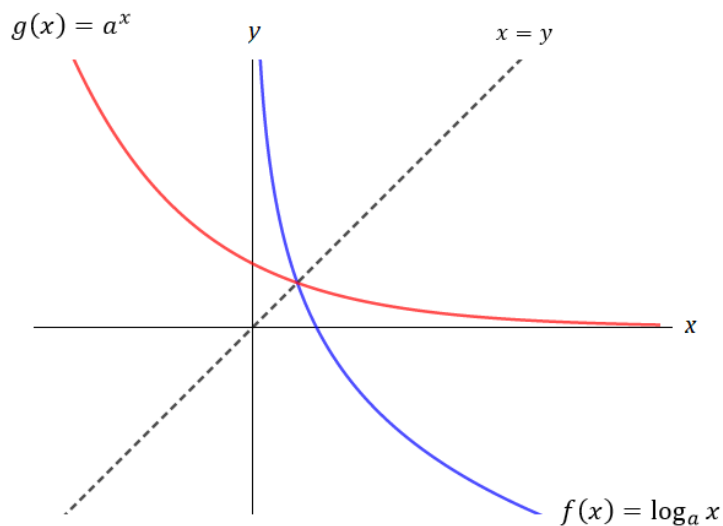
$$g(x) = a^x$$

Vamos analisar o gráfico dessas duas funções **em função da base a** do logaritmo.

1. $a > 1$



2. $0 < a < 1$



EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Este tópico **sintetiza** toda a matéria até então estudada. Iremos resolver equações que apresentam logaritmo em seus termos.

O item 5 das consequências da definição do logaritmo (estudado no início da aula) nos diz que:

Dois logaritmos em uma mesma base são iguais, se e somente se, **os logaritmandos também forem iguais**.

$$\log_a x = \log_a y \leftrightarrow x = y$$

Podemos expandir essa igualdade também para as funções.

Assim,

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Alguns tipos de equações logarítmicas podem aparecer na sua prova.

Iremos enumerar **três tipos** e posteriormente comentar alguns exemplos que abordam os mais diversos modos de se resolver uma equação logarítmica. Depois dos exemplos, resolveremos algumas questões de concurso sobre o tema.

Lembre-se sempre de que, para cada tipo estudado, estamos adotando a **condição de existência do logaritmo**, isto é, base maior que 0 e diferente de 1 e logaritmando maior que 1.

$\log_a f(x)$ Condição de existência: $a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ e } f(x) > 0$

I. Igualdade entre logaritmos de mesma base

É uma equação que apresenta igualdade de logaritmos do tipo:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

II. Igualdade entre um logaritmo e um número

Para resolver este tipo, aplicamos a definição de logaritmo.

$$\log_a f(x) = b \rightarrow f(x) = a^b$$

III. Mudança para uma incógnita auxiliar

Para resolver este tipo de equação, tomaremos como artifício o uso de uma incógnita auxiliar para facilitar nossa solução.

São equações do tipo:

$$(\log_a x)^2 + \log_a x = b$$

Vamos resolver alguns exemplos que abordam todos esses tipos para fixar a matéria. Atente-se que neste tópico, como falado acima, utilizaremos todo o conteúdo até aqui estudado.

As propriedades do logaritmo serão usadas exaustivamente, assim como a condição de existência do logaritmo, isto é, base maior que 0 e diferente de 1 e logaritmando maior que 1.

Também iremos utilizar a **definição de logaritmo** e as **consequências** decorrentes da definição.

Então é muito importante que você esteja familiarizado com cada propriedade do logaritmo para não se perder na resolução.

Exemplo 1: Obtenha o conjunto solução das equações abaixo:

a) $\log(4x - 9) = \log 71$

Observe que as bases são iguais, isto é, há igualdade entre dois logaritmos de mesma base (tipo I). Então,

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

$$4x - 9 = 71$$

$$4x = 80 \rightarrow x = 20$$

Conjunto Solução: $S = \{20\}$

$$b) \log_3(x + 17) = 5$$

Igualdade entre um logaritmo e um número (tipo II).

Resolveremos pela definição de logaritmo:

$$\log_3(x + 7) = 5$$

$$x + 7 = 3^5$$

$$x + 7 = 243 \rightarrow x = \mathbf{236}$$

Conjunto Solução: $S = \{\mathbf{236}\}$

$$c) (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x = -6$$

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação (tipo III).

Chamaremos $\log_3 x$ de y .

$$y = \log_3 x$$

Substituindo na equação e calculando o valor de y .

$$(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x = -6$$

$$y^2 - 5y = -6$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma 5 e produto 6.

$$y_1 = \mathbf{2} \text{ e } y_2 = \mathbf{3}$$

Iremos substituir na nossa igualdade auxiliar e calcular os valores de x que satisfazem a igualdade.

$$y = \log_3 x \quad \begin{cases} 2 = \log_3 x \rightarrow x = \mathbf{9} \\ 3 = \log_3 x \rightarrow x = \mathbf{27} \end{cases}$$

Conjunto Solução: $S = \{\mathbf{9}, \mathbf{27}\}$

$$d) \log_2(x - 3) + \log_2 12 = \log_2(x + 1)$$

Aplicando a "volta" da propriedade do logaritmo do produto e desenvolvendo a equação teremos:

$$\log_2(x - 3) + \log_2 12 = \log_2(x + 1)$$

$$\log_2[(x - 3) * 12] = \log_2(x + 1)$$

$$[(x - 3) * 12] = x + 1$$

$$12x - 36 = x + 1$$

$$11x = 37 \rightarrow x = \frac{37}{11}$$

Conjunto Solução: $S = \{37/11\}$

Vejamos como esse assunto já foi cobrado em prova.



(FUNDATEC - 2019) A solução da equação logarítmica $\log_{10}(x - 4) = 2$ é:

- a) $x = 6$
- b) $x = 10$
- c) $x = 50$
- d) $x = 100$
- e) $x = 104$

Comentários:

Perceba que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número. Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\log_{10}(x - 4) = 2$$

$$x - 4 = 10^2$$

$$x - 4 = 100 \rightarrow x = 104$$

Gabarito: Alternativa E

(CETREDE - 2019) Pode-se afirmar que o conjunto verdade da equação $\log x + \log(x + 1) - \log 6 = 0$ é igual a:

- a) $\{3\}$
- b) $\{2, -3\}$
- c) $\{2\}$
- d) $\{-2, 3\}$
- e) $\{2, 3\}$

Comentários:

Antes de começar a resolver, perceba que **não poderíamos jamais marcar as letras B ou D** como gabarito.

Observe o segundo fator da soma:

$$\log(x + 1)$$

O logaritmando tem que ser maior que 0 como condição de existência. Assim,

$$x + 1 > 0$$

$$x > -1$$

Ou seja, x tem que ser maior que -1 e as letras B e D apresentam -2 e -3 como solução, o que é impossível para nossa condição de existência.

Vamos trabalhar algebricamente com a igualdade e calcular o valor de x . Acompanhe.

$$\log x + \log(x + 1) - \log 6 = 0$$

$$\log(x^2 + x) = \log 6$$

$$x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 1 * (-6)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1 - 5}{2} \rightarrow \cancel{x_1 = -3} \\ x_2 = \frac{-1 + 5}{2} \rightarrow x_2 = 2 \end{array} \right.$$

Em um primeiro momento você poderia ir direto e marcar a letra B. Porém, vimos acima que para a condição de existência do logaritmo, x deve ser maior que -1 .

Sendo assim, a solução $x_1 = -3$ está **descartada**.

Nosso conjunto solução da equação será:

$$S = \{2\}$$

Gabarito: Alternativa **C**

(AMAUC - 2019) Seja a equação logarítmica $(\log_2 x)^2 - 6 * \log_2 x + 8 = 0$. O conjunto solução é:

- a) $\{6 \text{ e } 8\}$
- b) $\{4 \text{ e } 16\}$
- c) $\{2 \text{ e } 4\}$
- d) $\{-6 \text{ e } 8\}$
- e) $\{4 \text{ e } -16\}$

Comentários:

Para esta questão, usamos o mesmo raciocínio inicial da questão acima. **Jamais poderíamos marcar a letra D ou a E** na prova.

A condição de existência do logaritmo nos impõe que o logaritmando deve ser maior que 0. Observe o seguinte fator da equação:

$$\log_2 x$$

O logaritmando tem que ser maior que 0, como condição de existência. Assim,

$$x > 0$$

As letras D e E apresentam valores menores que 0 como solução. Ou seja, jamais poderiam ser marcadas.

Vamos utilizar uma incógnita auxiliar para solucionar esta equação.

Chamaremos $\log_2 x$ de y .

$$y = \log_2 x$$

Substituindo na equação e calculando o valor de y .

$$(\log_2 x)^2 - 6 * \log_2 x + 8 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma 6 e produto 8.

$$y_1 = 4 \text{ e } y_2 = 2$$

Mas, $y = \log_2 x$. Calculando x :

$$y = \log_2 x \quad \begin{cases} 4 = \log_2 x \rightarrow x = 16 \\ 2 = \log_2 x \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Gabarito: Alternativa **B**

(CESPE - 2018) O número de Euler, nome dado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é um número irracional denotado por e , cuja representação decimal tem seus 4 primeiros algarismos dados por 2,718. Esse número é a base dos logaritmos naturais, cuja função $f(x) = \ln x = \log_e x$ tem inúmeras aplicações científicas.

A respeito desse assunto, julgue o item a seguir.

A equação $\ln x = -4$ tem uma única solução.

Comentários:

Perceba que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número. Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\ln x = -4 \rightarrow x = e^{-4}$$

Então, há sim **apenas uma única** solução.

Gabarito: **Correto**

(OBJETIVA - 2015) Assinalar a alternativa que apresenta os resultados possíveis para a equação logarítmica abaixo:

$$\log_{(10-x)}(x^2 + 2x) = 1$$

- a) $x = -5$ e $x = 2$
- b) $x = -3$ e $x = 2$
- c) $x = -5$ e $x = 1$
- d) $x = -3$ e $x = 1$

Comentários:

Observe que é uma equação logarítmica onde há a igualdade entre um logaritmo e um número.

Resolveremos pela definição de logaritmo.

$$\log_{(10-x)}(x^2 + 2x) = 1$$

$$x^2 + 2x = 10 - x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Duas raízes que apresentam soma -3 e produto -10 .

$$x_1 = -5 \text{ e } x_2 = 2$$

Gabarito: Alternativa A

(CPCON - 2019) O conjunto solução da equação $\log_2(x^2 - 9x + 18) - \log_2(x - 6) = \log_2 8$, é:

- a) $S = \{12\}$
- b) $S = \{7\}$
- c) $S = \{9\}$
- d) $S = \{3\}$
- e) $S = \{11\}$

Comentários:

Vamos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo do quociente e calcular o valor de x .

$$\log_2(x^2 - 9x + 18) - \log_2(x - 6) = \log_2 8$$

$$\log_2\left(\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 6}\right) = \log_2 8$$

$$\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 6} = 8$$

$$x^2 - 9x + 18 = 8x - 48$$

$$x^2 - 17x + 66 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 * 1 * 66}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{2}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{17 \pm 5}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{17 + 5}{2} \rightarrow x_1 = 11 \\ x_2 = \frac{17 - 5}{2} \rightarrow x_2 = 6 \end{array} \right.$$

Encontramos 2 valores possíveis para x . Mas observe o segundo fator da equação:

$$\log_2(x - 6)$$

O logaritmando tem que ser maior que 0, como condição de existência. Assim,

$$x - 6 > 0$$

$$x > 6$$

Observe que $x_2 = 6$ não pode ser solução para nossa equação pois, como calculamos pela condição de existência, x tem que ser maior que 6. Logo, **x_2 está descartado**.

Sendo assim, o conjunto solução para nossa equação será:

$$S = \{11\}$$

Gabarito: Alternativa E

(CESGRANRIO - 2017) Qual o maior valor de k na equação $\log(kx) = 2 \log(x + 3)$ para que ela tenha exatamente uma raiz?

- a) 0
- b) 3
- c) 6
- d) 9
- e) 12

Comentários:

Vamos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo da potência e calcular o valor de k para que a equação tenha exatamente uma raiz.

Obs: Houve uma imprecisão terminológica. A banca quis dizer "duas raízes reais e iguais" no lugar de "uma raiz".

$$\log(kx) = 2 \log(x + 3)$$

$$\log(kx) = \log(x + 3)^2$$

$$kx = (x + 3)^2$$

$$kx = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + (6 - k)x + 9 = 0$$

Para que a equação tenha exatamente uma raiz, o delta de Bhaskara tem que ser igual a 0.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$(6 - k)^2 - 4 * 1 * 9 = 0$$

$$36 - 12k + k^2 - 36 = 0$$

$$k^2 - 12k = 0$$

$$k(k - 12) = 0$$

$$k = 0 \text{ ou } k = 12$$

Então, o maior valor para k será:

$$k = 12$$

Gabarito: Alternativa E

INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São **desigualdades** que apresentam logaritmos em um dos seus termos.

Assim, como estudado nas equações logarítmicas, vamos dividir as inequações em três tipos:

I. Desigualdades entre logaritmos de mesma base

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

Neste item, 2 pontos (a depender do valor da base) devem ser considerados.

Estudamos que quando a base a do logaritmo é maior que 1 ($a > 1$) a função é crescente e quando a base a está entre 0 e 1 ($0 < a < 1$) a função é decrescente.

Relembrando:

- Se $a > 1$, a função será **crescente** e dado $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.
- Se $0 < a < 1$, a função será **decrescente** e dado $x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

1. $a > 1$

Quando a base é maior que 1, iremos **MANTER** o sentido da desigualdade.

$$\text{Se } a > 1, \log_a f(x) > \log_a g(x) \rightarrow f(x) > g(x)$$

2. $0 < a < 1$

Quando a base é um número entre 0 e 1, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

$$\text{Se } 0 < a < 1, \log_a f(x) > \log_a g(x) \rightarrow 0 < f(x) < g(x)$$



$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow f(x) > g(x) & \text{mantém a desigualdade} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow 0 < f(x) < g(x) & \text{inverte a desigualdade} \end{cases}$$

II. Desigualdade entre um logaritmo e um número

$$\log_a f(x) \leq k$$

Para resolver este tipo de desigualdade, utilizaremos a definição de logaritmo.

Porém, assim como estudado no item acima, iremos inverter ou não o sinal da desigualdade a depender do valor da base a do logaritmo.

Quando a **base for maior que 1**, iremos **MANTER** o sentido da desigualdade. Enquanto que, quando **a base for um número entre 0 e 1**, iremos **INVERTER** o sentido da desigualdade.

Sintetizando teremos:

$$\log_a f(x) > k \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow f(x) > a^k \text{ mantém o sinal} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow 0 < f(x) < a^k \text{ inverte o sinal} \end{cases}$$

Observe que podemos ter também o caso de $\log_a f(x) < k$. Mas a ideia permanece a mesma. Mantém o sinal quando a base é maior que 1 e inverte quando a base estiver entre 0 e 1.

Vejamos:

$$\log_a f(x) < k \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow 0 < f(x) < a^k \text{ mantém o sinal} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow f(x) > a^k \text{ inverte sinal} \end{cases}$$

III. Mudança para uma incógnita auxiliar

Para resolver este tipo de equação, assim como nas equações logarítmicas, tomaremos como artifício o uso de uma incógnita auxiliar para facilitar nossa solução.



Nas **inequações logarítmicas** iremos calcular também a **condição de existência de cada fator** que apresenta o logaritmo em seu termo.

Calcularemos o **intervalo solução** para cada logaritmando e também o intervalo solução da inequação.

E nossa **resposta** será a interseção desses intervalos.

Vejamos nos exemplos e nas questões de provas solucionadas abaixo como devemos proceder.

Exemplo 1: Calcule o conjunto solução das inequações abaixo:

a) $\log_5(2x + 5) < 2$

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- (I) – $\log_5(2x + 5)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$2x + 5 > 0$$

$$2x > -5$$

$$x > -\frac{5}{2}$$

- (II) – $\log_5(2x + 5) < 2$

Observe que se trata de uma inequação do tipo II, isto é, desigualdade entre um logaritmo e um número.

Utilizaremos a definição de logaritmo para calcular o valor de x que satisfaz a inequação. E nesse caso, **a base é maior que 1**, ou seja, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\log_a f(x) < k \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow 0 < f(x) < a^k \text{ mantém o sinal} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow f(x) > a^k \text{ inverte sinal} \end{cases}$$

Calculando x teremos:

$$\log_5(2x + 5) < 2$$

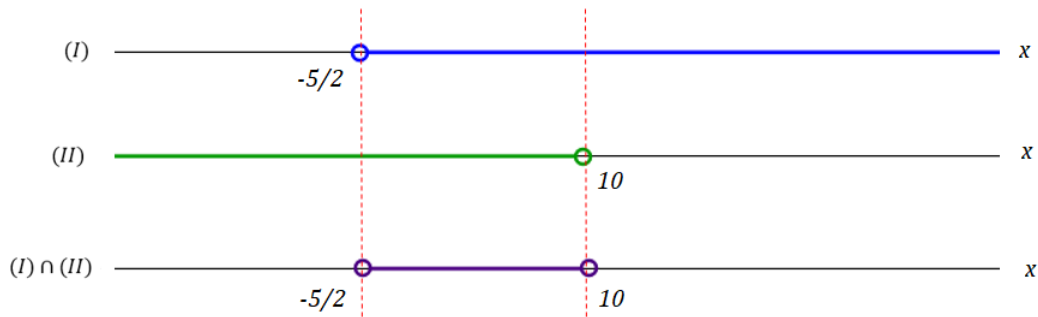
$$2x + 5 < 5^2$$

$$2x + 5 < 25$$

$$2x < 20$$

$$x < 10$$

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução da inequação será:

$$S = -\frac{5}{2} < x < 10$$

b) $\log_{1/2}(3x - 2) < \log_{1/2} 7$

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $(I) - \log_{1/2}(3x - 2)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$3x - 2 > 0$$

$$3x > 2$$

$$x > \frac{2}{3}$$

- $(II) - \log_{1/2}(3x - 2) < \log_{1/2} 7$

Observe que se trata de uma inequação do tipo I, isto é, desigualdade entre logaritmos de mesma base. E nesse caso, **a base do logaritmo está entre 0 e 1**. Logo, devemos **INVERTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow f(x) > g(x) & \text{mantém a desigualdade} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow 0 < f(x) < g(x) & \text{inverte a desigualdade} \end{cases}$$

Resolvendo a inequação:

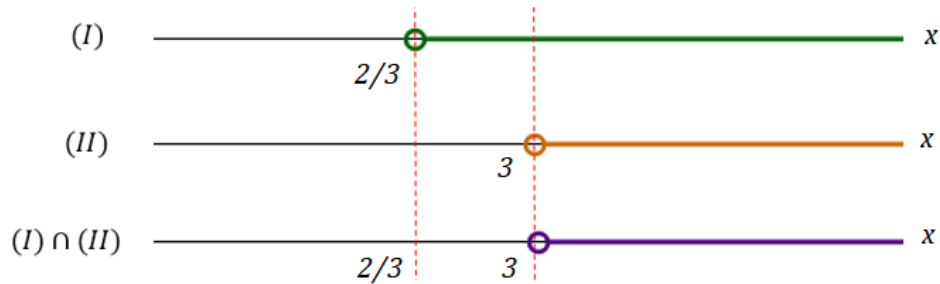
$$\log_{1/2}(3x - 2) < \log_{1/2} 7$$

$$3x - 2 > 7$$

$$3x > 9$$

$$x > 3$$

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução da inequação será:

$$S = x > 3$$

$$c) (\log_2(x))^2 - 5 * \log_2(x) + 6 > 0$$

Mesmo procedimento dos outros dois exemplos. Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

Como os dois fatores que apresentam logaritmos são iguais, o estudo de um será igual ao do outro.

- (I) – $\log_2(x)$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$x > 0$$

- (II) – $(\log_2(x))^2 - 5 * \log_2(x) + 6 > 0$

Observe que se trata de uma inequação do tipo III, isto é, necessitaremos de uma incógnita auxiliar para nos ajudar a encontrar o conjunto solução.

Vamos chamar $\log_2(x)$ de y e resolver para y .

$$y = \log_2(x)$$

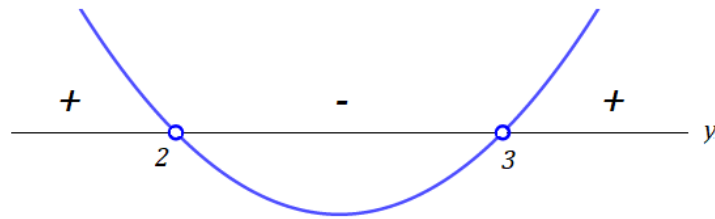
$$y^2 - 5y + 6 > 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Duas raízes que a soma seja 5 e o produto 6.

$$y_1 = 2 \text{ e } y_2 = 3$$

Faremos o estudo de y na reta. Trata-se de uma parábola com concavidade voltada para cima e raízes em 2 e 3.



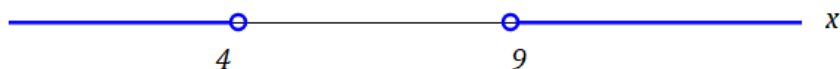
Para ser maior que 0, nosso intervalo será o intervalo positivo, isto é, o intervalo menor que 2 e o intervalo maior que 3.



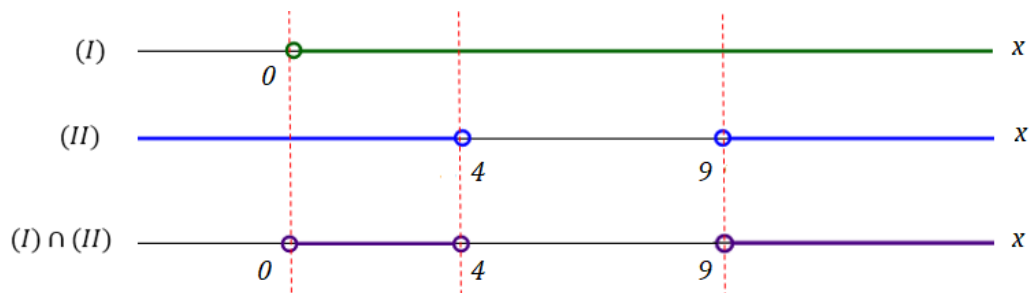
Porém, precisamos fazer o estudo da inequação em x . Sabemos que:

$$y = \log_2(x) \rightarrow \begin{cases} 2 = \log_2(x) \rightarrow x = 4 \\ 3 = \log_2(x) \rightarrow x = 9 \end{cases}$$

Logo, nossa reta em x será:



Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das duas soluções.



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$S = 0 < x < 4 \text{ ou } x > 9$$

Vamos analisar como este assunto é cobrado em prova.



(COTEC - 2020) Resolvendo-se a inequação $\log 2x > \log(x + 1)$, obtemos:

- a) $S = \{x \in R \mid x < -1\}$
- b) $S = \{x \in R \mid x > -1\}$
- c) $S = \{x \in R \mid x > 1\}$
- d) $S = \{x \in R \mid x > 1/2\}$
- e) $S = \{x \in R \mid x < 1/2\}$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando das duas funções e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- (I) – $\log 2x$

Estudamos na condição de existência do logaritmo que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$2x > 0$$

$$x > 0$$

- (II) – $\log(x + 1)$

Sendo o logaritmando maior que 0:

$$x + 1 > 0$$

$$x > -1$$

- (III) – $\log 2x > \log(x + 1)$

Relembrando a teoria:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow f(x) > g(x) & \text{mantém a desigualdade} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow 0 < f(x) < g(x) & \text{inverte a desigualdade} \end{cases}$$

Como a base do logaritmo (10) é maior que 1, a desigualdade se mantém.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \rightarrow f(x) > g(x)$$

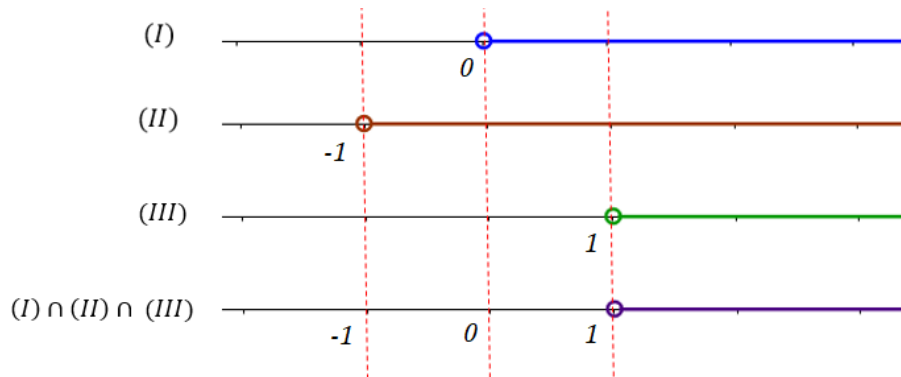
$$\log 2x > \log(x + 1)$$

$$2x > x + 1$$

$$x > 1$$

Então, chegamos a três soluções distintas para nosso valor de x .

Vamos fazer o estudo das soluções na reta e calcular a interseção das três soluções.



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

Gabarito: Alternativa C

(FGV - 2013) Considere a desigualdade:

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0$$

O menor valor inteiro x que satisfaz essa desigualdade é:

- a) $2013^{2014} + 1$
- b) $2014^{2013} + 1$
- c) $2014^{2015} + 1$
- d) $2015^{2014} + 1$
- e) 2016

Comentários:

Vamos resolver normalmente pela definição de logaritmo e, como as **bases são maiores que 1**, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015} x)) > 0$$

$$\log_{2014}(\log_{2015} x) > 2013^0$$

$$\log_{2014}(\log_{2015} x) > 1$$

$$\log_{2015} x > 2014$$

$$x > 2015^{2014}$$

Perceba que x tem que ser maior que esse número. O primeiro inteiro maior que esse número é igual a esse número somado a unidade.

Sendo assim, o conjunto solução pedido no enunciado será:

$$S = 2015^{2014} + 1$$

Gabarito: Alternativa **D**

(FUNCAB - 2014) Resolva a inequação abaixo:

$$\log_{0,5}(x - 1) > 2$$

- a) $]1, 5/4[$
- b) $]1, +\infty[$
- c) $] -\infty, 5/4[$
- d) $] -\infty, 1[$
- e) $]5/4, +\infty[$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando da função e posteriormente o estudo da inequação logarítmica.

- (I) - $\log_{0,5}(x - 1)$

Estudamos que o logaritmando deve ser maior que 0. Logo,

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

- (II) - $\log_{0,5}(x - 1) > 2$

Vamos resolver pela definição de logaritmo. Porém, como **a base do logaritmo está entre 0 e 1**, iremos **INVERTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\log_a f(x) > k \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow f(x) > a^k \text{ mantém o sinal} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow 0 < f(x) < a^k \text{ inverte o sinal} \end{cases}$$

Então,

$$\log_{0,5}(x - 1) > 2$$

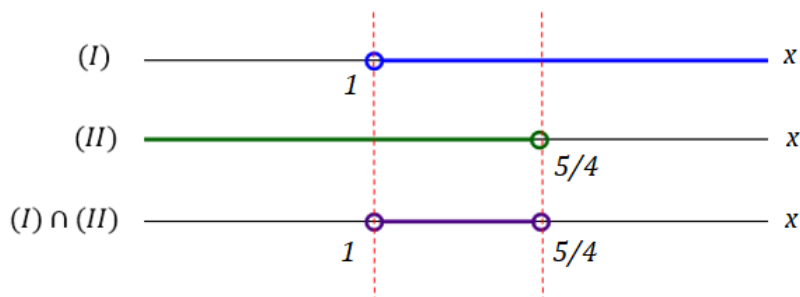
$$x - 1 < 0,5^2$$

$$x - 1 < \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{1}{4} + 1$$

$$x < \frac{5}{4}$$

Vamos fazer o estudo das duas soluções na reta e achar a interseção delas (que será nosso resultado).



Logo, o conjunto solução será igual a:

$$S = \left] 1, \frac{5}{4} \right[$$

Gabarito: Alternativa **A**

(MOURA MELO - 2011) Resolvendo em R a inequação logarítmica:

$$\log_2(x - 3) - \log_2(x - 4) < 3$$

Obtém-se:

- a) $\{x \in R \mid x > 29/7\}$
- b) $\{x \in R \mid 4 < x < 29/7\}$
- c) $\{x \in R \mid 4 \leq x \leq 29/7\}$
- d) $\{x \in R \mid x < 4\}$

Comentários:

Vamos fazer o estudo do logaritmando das duas funções e depois o estudo da inequação para calcularmos o conjunto solução.

- $\log_2(x - 3)$

Estudamos que o logaritmando tem que ser maior que 0. Então,

$$x - 3 > 0$$

$$x > 3$$

- $\log_2(x - 4)$

Novamente, temos que o logaritmando deve ser maior que 0.

$$x - 4 > 0$$

$$x > 4$$

- $\log_2(x - 3) - \log_2(x - 4) < 3$

Vamos resolver pela definição de logaritmo. A **base do logaritmo é maior que 1**, então, iremos **MANTER** o sinal da desigualdade.

Relembrando a teoria:

$$\log_a f(x) < k \begin{cases} \text{Se } a > 1 \rightarrow 0 < f(x) < a^k \text{ mantém o sinal} \\ \text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow f(x) > a^k \text{ inverte sinal} \end{cases}$$

Iremos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo do quociente e resolver para x .

$$\log_2(x - 3) - \log_2(x - 4) < 3$$

$$\log_2\left(\frac{x - 3}{x - 4}\right) < 3$$

$$\frac{x - 3}{x - 4} < 2^3$$

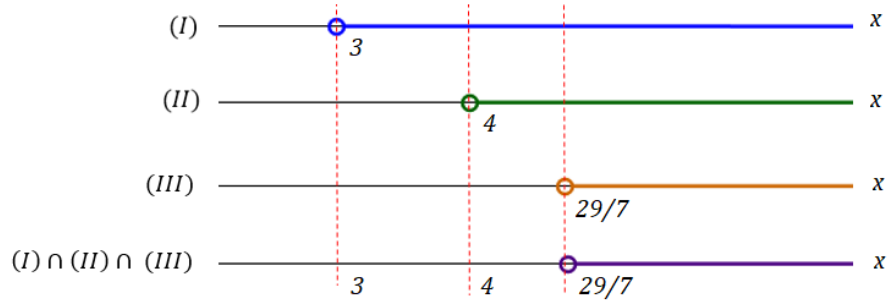
$$\frac{x - 3}{x - 4} < 8$$

$$x - 3 < 8x - 32$$

$$29 < 7x$$

$$\frac{29}{7} < x \text{ ou } x > \frac{29}{7}$$

Vamos fazer o estudo das três soluções na reta e achar a interseção delas (que será nosso resultado).



Sendo assim, o conjunto solução será igual a:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 29/7\}$$

Gabarito: Alternativa **A**

Chegamos ao final da teoria. Iremos comentar agora uma **bateria de questões de concursos** das mais variadas bancas que sintetizam todo o conteúdo estudado.

Vamos juntos!



QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Logaritmo

1. (CESGRANRIO / BR - 2015) Sejam $M = \log 30$ e $N = \log 300$.

Na igualdade $x + N = M$, qual é o valor de x ?

- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) +1
- e) +2

Comentários:

Vamos substituir os valores na igualdade e calcular o valor de x .

$$x + N = M$$

$$x + \log 300 = \log 30$$

$$x = \log 30 - \log 300$$

Iremos aplicar a "volta" da propriedade do Logaritmo do Quociente.

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$x = \log 30 - \log 300$$

$$x = \log \left(\frac{30}{300} \right)$$

$$x = \log 0,1 \rightarrow x = -1$$

Observe que nesta parte final aplicamos a definição de logaritmo para chegar ao resultado.

10 elevado a que número é igual a 0,1? Resposta: 10 elevado a -1.

Caso você tenha dificuldade, pode manipular algebricamente para se chegar ao resultado. Vejamos. 0,1 é igual a $1/10$ que é igual a 10^{-1} .

$$x = \log 0,1$$

$$x = \log 10^{-1}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$x = \log 10^{-1}$$

$$x = -1 \times \log 10$$

Sabemos que $\log 10 = 1$. Então:

$$x = -1 \times \log 10$$

$$x = -1 \times 1 \rightarrow \mathbf{x = -1}$$

Gabarito: Alternativa **B**

2. (CESGRANRIO / Liquigas - 2014) A sequência $\{a_n\}$, $n \in N$ é uma progressão geométrica de termos positivos cuja razão é $1/64$.

Considere $\{b_n\}$, $n \in N$ a sequência definida por:

$$b_n = \log_2((a_n)^3)$$

A sequência $\{b_n\}$ é uma progressão

- a) aritmética de razão -18.
- b) aritmética de razão -6.
- c) aritmética de razão 32.

- d) geométrica de razão 16.
- e) geométrica de razão 12.

Comentários:

Para resolver esta questão, vamos arbitrar um valor para o primeiro termo da PG. Iremos chamar $a_1 = 64$.

Então, de posse de a_1 e da razão $1/64$, vamos montar esta PG até o terceiro termo.

$$\{a_n\} = \left(64 ; 1 ; \frac{1}{64} ; \dots \right)$$

Observe que cada número é obtido pelo número anterior multiplicado pela razão. De posse da PG, podemos determinar a sequência $\{b_n\}$. Antes de passar aos cálculos, vamos aplicar a propriedade do Logaritmo da Potência.

$$b_n = \log_2((a_n)^3)$$

$$b_n = 3 \times \log_2(a_n)$$

✚ Calculando b_1 :

$$b_1 = 3 \times \log_2(a_1)$$

$$b_1 = 3 \times \log_2(64)$$

$$b_1 = 3 \times 6 \rightarrow \boxed{b_1 = 18}$$

✚ Calculando b_2 :

$$b_2 = 3 \times \log_2(a_2)$$

$$b_2 = 3 \times \log_2(1)$$

$$b_2 = 3 \times 0 \rightarrow \boxed{b_2 = 0}$$

✚ Calculando b_3 :

$$b_3 = 3 \times \log_2(a_3)$$

$$b_3 = 3 \times \log_2\left(\frac{1}{64}\right)$$

$$b_3 = 3 \times -6 \rightarrow \boxed{b_3 = -18}$$

Lembrando da aula de potência que $\frac{1}{64} = 2^{-6}$.

Então, escrevendo a sequência $\{b_n\}$ teremos:

$$\{b_n\} = (18; 0; -18; \dots)$$

Perceba que cada número é igual ao número anterior menos 18. Ou seja, a sequência $\{b_n\}$ é uma progressão aritmética de razão -18 .

Gabarito: Alternativa **A**

3. (CESGRANRIO / BASA - 2013) Sabe-se que x e y são números reais tais que:

$$y = 5^{3x}$$

Conclui-se que x é igual a

- a) $\log_5(y^3)$
- b) $\log_5(y/3)$
- c) $\log_5(\sqrt[3]{y})$
- d) $-\log_5(3y)$
- e) $\frac{1}{3 \log_5(y)}$

Comentários:

Vamos aplicar " $\log_5$ " nos dois lados da igualdade e desenvolver a expressão.

$$y = 5^{3x}$$

$$\log_5 y = \log_5 5^{3x}$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo da Potência.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$\log_5 y = \log_5 5^{3x}$$

$$\log_5 y = 3x \times \log_5 5$$

Sabemos que $\log_5 5 = 1$.

$$\log_5 y = 3x \times 1$$

$$\log_5 y = 3x \rightarrow x = \frac{1}{3} \times \log_5 y$$



Cuidado para não marcar a Alternativa B. Observe que a fração na expressão acima está **FORA** dos parênteses, enquanto que na alternativa está dentro. São números totalmente diferentes.

Por fim, para chegar em umas das respostas, iremos aplicar a "volta" da propriedade do Logaritmo da Potência vista acima.

$$x = \frac{1}{3} \times \log_5 y$$

$$x = \log_5 y^{1/3} \rightarrow x = \log_5 \sqrt[3]{y}$$

Gabarito: Alternativa C

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dado $\log_3 2 = 0,63$, tem-se que $\log_6(24)$ é igual a

- a) 1,89
- b) 1,77
- c) 1,63
- d) 1,51
- e) 1,43

Comentários:

Iremos chamar $y = \log_6(24)$ e calcular seu valor.

Observe, primeiramente, que a banca nos fornece o valor de um logaritmo na base 3. Então, vamos começar desenvolvendo o valor questionado mudando sua base para a base 3.

Dados a, x e b , números reais positivos e a e $b \neq 1$, o logaritmo de x na base a pode ser escrito da seguinte forma:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$y = \log_6(24)$$

$$y = \frac{\log_3 24}{\log_3 6}$$

Reescrevendo os valores decompostos:

$$y = \frac{\log_3(2^3 \times 3)}{\log_3(2 \times 3)}$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo do produto.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x * y) = \log_a x + \log_a y$$

$$y = \frac{\log_3 2^3 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

Iremos aplicar a propriedade do Logaritmo da Potência no primeiro fator do numerador.

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p * \log_a x$$

$$y = \frac{\log_3 2^3 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$y = \frac{3 \times \log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

Sabemos que $\log_3 3 = 1$ e que, conforme fornecido no enunciado, $\log_3 2 = 0,63$. Substituindo os valores:

$$y = \frac{3 \times \log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$y = \frac{3 \times 0,63 + 1}{0,63 + 1}$$

$$y = \frac{2,89}{1,63} \rightarrow y = 1,77$$

Gabarito: Alternativa **B**

5. (CESGRANRIO / BR - 2010) Se b é um número real positivo, diferente de 1, logo, deduz-se que

- a) $\log_b 7 > \log_b 3$
- b) $\log_b 12 = (\log_b 6)(\log_b 2)$
- c) $\log_b 24 = (\log_b 3) + 3(\log_b 2)$
- d) $\log_b (-10)^{-10} < 0$
- e) $\log_b \sqrt[5]{4} = \frac{\log_b 5}{\log_b 4}$

Comentários:

Vamos analisar item a item.

$$a) \log_b 7 > \log_b 3$$

INCORRETO. Perceba que não podemos generalizar esta desigualdade. Essa alternativa seria correto se $b > 1$.

Porém, se b estiver entre 0 e 1, isto é, $0 < b < 1$, a **desigualdade inverte o sinal**:

$$\log_b 7 < \log_b 3$$

Logo, nem sempre essa assertiva é verdadeira.

$$b) \log_b 12 = (\log_b 6)(\log_b 2)$$

INCORRETO. A banca aplicou erradamente a propriedade do Logaritmo do Produto. O correto seria:

$$\log_b 12 = \log_b(6 \times 2) = \log_b 6 + \log_b 2$$

$$c) \log_b 24 = (\log_b 3) + 3(\log_b 2)$$

CORRETO. Vamos decompor o número 24.

$$\log_b 24 = \log_b(2^3 \times 3)$$

Iremos aplicar a propriedade do Logaritmo do Produto.

$$\log_b(2^3 \times 3) = \log_b 2^3 + \log_b 3$$

Por fim, aplicamos a propriedade do Logaritmo da Potência:

$$\log_b 2^3 + \log_b 3 = 3 \times \log_b 2 + \log_b 3$$

Sendo assim, a assertiva está correta.

$$d) \log_b(-10)^{-10} < 0$$

INCORRETO. Estudamos (na teoria) que a condição de existência é:

$$\log_a x = y$$

$\xrightarrow{\text{logaritmando}}$ $\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$
 $\xleftarrow{\text{base}}$

Condição de existência: $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$

Sendo assim, a alternativa contraria a condição de existência do logaritmo, uma vez que $-10 < 0$.

$$e) \log_b \sqrt[5]{4} = \frac{\log_b 5}{\log_b 4}$$

INCORRETO. Vamos desenvolver $\log_b \sqrt[5]{4}$.

$$\log_b \sqrt[5]{4} = \log_b 4^{1/5}$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo do Produto:

$$\log_b 4^{1/5} = \frac{1}{5} \times \log_b 4$$

Logo, a assertiva está errada.

Gabarito: Alternativa **C**

6. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) A magnitude de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas, sob características padronizadas, produzidas durante um terremoto.

O poder destrutivo de um terremoto é proporcional à potência $3/2$ de sua amplitude. A razão do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Richter, é de

- a) $(10)^{1,5}$
- b) $(10)^{-1,5}$
- c) 1
- d) $(1/100)^{-1,5}$
- e) $(1/10)^{1,5}$

Comentários:

O poder destrutivo D de um terremoto é proporcional à potência $3/2$ de sua amplitude A . Ou seja,

$$D = A^{3/2}$$

A magnitude M de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas.

$$M = \log A$$

Vamos calcular a Magnitude e o poder Destrutivo para dois terremotos, de escalas 5 (terremoto I) e 6 (terremoto II) na escala Richter.



I: 5 na escala Richter.

$$M = \log A$$

$$M_I = \log A_I$$

$$5 = \log A_I \rightarrow \boxed{A_I = 10^5}$$

De posse da Amplitude, calculamos o poder destrutivo D :

$$D = A^{3/2}$$

$$D_I = A_I^{3/2}$$

$$D_I = (10^5)^{3/2}$$

$$D_I = 10^{15/2} \rightarrow \boxed{D_I = 10^{7,5}}$$



II: 6 na escala Richter.

$$M = \log A$$

$$M_{II} = \log A_{II}$$

$$6 = \log A_{II} \rightarrow \boxed{A_{II} = 10^6}$$

De posse da Amplitude, calculamos o poder destrutivo D :

$$D = A^{3/2}$$

$$D_{II} = A_{II}^{3/2}$$

$$D_{II} = (10^6)^{3/2}$$

$$D_{II} = 10^{18/2} \rightarrow \boxed{D_{II} = 10^9}$$

Sendo assim, a razão d do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Richter, é de:

$$d = \frac{D_I}{D_{II}}$$

$$d = \frac{10^{7,5}}{10^9}$$

$$d = 10^{7,5-9} \rightarrow \boxed{d = 10^{-1,5}}$$

Gabarito: Alternativa **B**

7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Sejam x , M , N e P números reais positivos que tornam verdadeiras as igualdades

$$\frac{\log M}{2} = \frac{\log N}{6} = \frac{\log P}{4} = \log x$$

Qual é o valor de K para o qual

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

- a) -1
- b) 3
- c) 4
- d) 6
- e) 9

Comentários:

Vamos trabalhar com as igualdades uma a uma e calcular o valor de M , N e P em função de x .

 M em função de x :

$$\frac{\log M}{2} = \log x$$

$$\log M = 2 \times \log x$$

$$\log M = \log x^2 \rightarrow \boxed{M = x^2}$$

 N em função de x :

$$\frac{\log N}{6} = \log x$$

$$\log N = 6 \times \log x$$

$$\log N = \log x^6 \rightarrow \boxed{N = x^6}$$

 P em função de x :

$$\frac{\log P}{4} = \log x$$

$$\log P = 4 \times \log x$$

$$\log P = \log x^4 \rightarrow \boxed{P = x^4}$$

Agora, de posse do valor das incógnitas em função de x , vamos substituir os valores na igualdade fornecida e calcular o valor de k .

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

$$\frac{(x^6)^2}{\sqrt{x^2 \times x^4}} = x^k$$

$$\frac{x^{6 \times 2}}{\sqrt{x^{2+4}}} = x^k$$

$$\frac{x^{12}}{\sqrt{x^6}} = x^k$$

$$\frac{x^{12}}{x^3} = x^k$$

$$x^{12-3} = x^k$$

$$x^9 = x^k \rightarrow \boxed{k = 9}$$

Gabarito: Alternativa E

8. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Se

$$y = \log_{81} \left(\frac{1}{27} \right) \text{ e } x \in R_+$$

são tais que $x^y = 8$, então x é igual a:

a) $1/16$

- b) $1/2$
- c) $\log_3 8$
- d) 2
- e) 16

Comentários:

Vamos desenvolver a expressão de y :

$$y = \log_{81} \left(\frac{1}{27} \right)$$

Escrevendo em termos da potência de 3.

$$y = \log_{3^4} \left(\frac{1}{3^3} \right)$$

$$y = \log_{3^4} (3^{-3})$$

Aplicando simultaneamente as propriedades da Logaritmo da Potência e da Base elevada a um expoente:

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

Quando a **base estiver elevada a um expoente**, o logaritmo é igual ao **produto do inverso da base vezes o logaritmo**.

$$\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \times \log_a x$$

$$y = \log_{3^4} (3^{-3})$$

$$y = \frac{-3}{4} \times \log_3 3$$

Sabemos que $\log_3 3 = 1$. Então:

$$y = \frac{-3}{4}$$

O enunciado nos informa que $x^y = 8$.

$$x^y = 8$$

$$x^y = 2^3$$

Vamos aplicar $\log_2$ nos dois lados e desenvolver a igualdade:

$$x^y = 2^3$$

$$\log_2 x^y = \log_2 2^3$$

$$y \times \log_2 x = 3 \times \log_2 2$$

Substituindo $y = \frac{-3}{4}$:

$$\frac{-3}{4} \times \log_2 x = 3$$

$$\log_2 x = \frac{3 \times 4}{-3}$$

$$\log_2 x = -4$$

$$x = 2^{-4}$$

$$x = \frac{1}{2^4} \rightarrow x = \frac{1}{16}$$

Gabarito: Alternativa **A**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Função Logarítmica

1. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) Sejam F e G funções reais definidas em domínios convenientes, de modo que existam números reais y_1 e y_2 tais que

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G(x) = y_2 = x^3$$

Com as devidas restrições, a saber, $y_2 \neq 0$, podemos calcular $F(y_2)$ e, nesse caso, encontraremos

- a) $-3y_1$
- b) $-y_1$
- c) y_1
- d) $3y_1$
- e) $(y_1)^3$

Comentários:

Sabemos que $y_2 = x^3$. Então, estamos em busca do valor de:

$$F(y_2) \rightarrow F(x^3)$$

O enunciado nos informa que:

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sendo assim, $F(x^3)$ será igual a:

$$F(x^3) = \log\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$F(x^3) = \log\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$F(x^3) = \left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3$$

Aplicando a propriedade do Logaritmo da potência:

$$F(x^3) = 3 \times \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

A banca nos informa que $y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$. Substituindo teremos:

$$F(x^3) = 3 \times \log\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow F(x^3) = 3y_1$$

Gabarito: Alternativa **D**

2. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dada a função $f(x) = \log x$, de domínio $\mathbb{R}^{*+}$, têm-se $f(2) = 0,3$ e $f(3) = 0,48$. Se $f(p) = 1,38$, então p é igual a

- a) 12
- b) 18
- c) 24
- d) 30
- e) 36

Comentários:

Observe que esta questão é uma "volta" do que estamos acostumados a fazer. Viemos trabalhando sempre com a decomposição de um número e a substituição pelos Logaritmos para achar um valor final.



Por exemplo, a banca fornece o valor de $\log 2$ e $\log 3$ e nos pede para calcular o $\log 24$. Este é o caso que estamos "acostumados". Iríamos decompor o número 24 e substituir em função de 2 e 3.

Porém, nesta questão, **a banca fornece o resultado e nos questiona o número que apresenta este resultado**. É como se ela fornecesse o resultado de $\log 24$ (sem dizer que a resposta é 24) e perguntasse qual número resulta na resposta fornecida.

Vamos então decompor o resultado dado em função de 0,3 e 0,48.

$$f(p) = 1,38 = 0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,48$$

Iremos substituir os resultados pelas respectivas funções (entendeu agora como este exercício é a volta? Estamos acostumados a substituir a função pelo resultado dela. Agora substituímos o resultado pela função).

$$f(p) = 1,38 = 0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,48$$

$$f(p) = 1,38 = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3$$

Aplicando a "volta" da propriedade do Logaritmo do Produto:

$$f(p) = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3$$

$$f(p) = \log(2 \times 2 \times 2 \times 3)$$

$$f(p) = \log(24) \rightarrow p = 24$$

Gabarito: Alternativa **C**

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Equações Logarítmicas

1. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018) Se x e y são números reais, tais que $2 \log(x - 2y) = \log x + \log y$, qual valor de x/y ?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

Comentários:



Vamos desenvolver a igualdade acima aplicando a "volta" da propriedade do Logaritmo da Potência do lado esquerdo da igualdade e a "volta" do Logaritmo do Produto do lado direito.

O logaritmo de uma **potência** é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p * \log_a x$$

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2 \log(x - 2y) = \log x + \log y$$

$$\log(x - 2y)^2 = \log(xy)$$

Logo,

$$(x - 2y)^2 = xy$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

Vamos desenvolver a equação do segundo grau para calcular o valor de x em função de y .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5y) \pm \sqrt{(-5y)^2 - 4 \times 1 \times 4y^2}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{2}$$

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{9y^2}}{2}$$

$$x = \frac{5y \pm 3y}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5y + 3y}{2} = \frac{8y}{2} \rightarrow \boxed{x = 4y} \\ x = \frac{5y - 3y}{2} = \frac{2y}{2} \rightarrow \boxed{x = y} \end{array} \right.$$

Então, achamos duas igualdades: $x = 4y$ e $x = y$. O enunciado nos questiona o valor de $\frac{x}{y}$. Vamos trabalhar separadamente com cada igualdade.

$$\text{✚ } x = 4y$$

$$x = 4y \rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = 4}$$

$$\text{✚ } x = y$$

$$x = y \rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = 1}$$

Observe que achamos duas respostas. Alternativa A e Alternativa D. Porém, **não podemos esquecer de um "pequeno grande" detalhe.**

Aprendemos em logaritmo que o Logaritmando há de ser maior que zero. Então:

$$x - 2y > 0$$

$$x > 2y \rightarrow \frac{x}{y} > 2$$

Logo, dado que $\frac{x}{y}$ tem que ser maior que 2, eliminamos a segunda resposta ($\frac{x}{y} = 1$). Sendo assim, nossa resposta será igual a:

$$\frac{x}{y} = 4$$

Gabarito: Alternativa **D**

2. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Se $\log x$ representa o logaritmo na base 10 de x , então o valor de n tal que $\log n = 3 - \log 2$ é

- a) 2.000
- b) 1.000
- c) 500
- d) 100
- e) 10

Comentários:

Se você recordasse que 3 é igual ao $\log 1.000$ mataria esta questão rapidamente. Vejamos:

Sabemos que $\log 1.000 = 3$, pois pela definição de logaritmo $10^3 = 1.000$. Substituindo 3 por $\log 1.000$:

$$\log n = 3 - \log 2$$

$$\log n = \log 1.000 - \log 2$$

Aplicando a "volta" da propriedade do Logaritmo do Quociente.

O logaritmo do **quociente** é igual a **diferença** dos seus logaritmos.

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log n = \log 1.000 - \log 2$$

$$\log n = \log \left(\frac{1.000}{2} \right)$$

$$\log n = \log 500 \rightarrow n = 500$$

"Professor, e se eu na hora da prova, por nervosismo esquecesse?"

Então, caro Aluno. Neste caso iríamos desenvolver a expressão. Não mudaria muita coisa a resolução. Vejamos:

$$\log n = 3 - \log 2$$

$$\log n + \log 2 = 3$$

Aplicando a "volta" da propriedade do Logaritmo do Produto.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log n + \log 2 = 3$$

$$\log(2n) = 3$$

$$2n = 10^3$$

$$2n = 1.000$$

$$n = \frac{1.000}{2} \rightarrow n = 500$$

Gabarito: Alternativa C

3. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2017) Qual o maior valor de k na equação

$$\log(kx) = 2 \log(x + 3)$$

para que ela tenha exatamente uma raiz?

- a) 0
- b) 3
- c) 6
- d) 9
- e) 12

Comentários:



Observe que o enunciado nos pergunta o valor de k para que tenha exatamente uma raiz, ou seja, nesse momento na hora da prova, você tem que ter em mente que, de alguma forma, você tem que chegar a uma equação do segundo grau.

E mais, uma equação do segundo grau e que o delta de Bháskara seja igual a 0, pois como estudamos nas aulas de equação do segundo grau, para um delta igual a 0 a equação apresenta exatamente uma raiz.

Iremos desenvolver a igualdade acima para buscar uma equação quadrática. Vejamos passo a passo.

$$\log(kx) = 2 \log(x + 3)$$

Vamos aplicar a "volta" da propriedade do logaritmo da potência.

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p * \log_a x$$

$$\log(kx) = 2 \log(x + 3)$$

$$\log(kx) = \log \log(x + 3)^2$$

$$kx = (x + 3)^2$$

$$kx = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 6x - kx + 9 = 0$$

$$x^2 + (6 - k)x + 9 = 0$$

Esta é nossa equação do segundo grau. Para que tenha apenas uma raiz, $\Delta = 0$.

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$$

$$\sqrt{(6 - k)^2 - 4 \times 1 \times 9} = 0$$

$$\sqrt{(6 - k)^2 - 36} = 0$$

Elevando os 2 lados ao quadrado:

$$(6 - k)^2 - 36 = 0$$

$$(6 - k)^2 = 36$$

Para $(6 - k)$ ao quadrado ser igual a 36, o valor de dentro dos parênteses tem que ser igual a 6 ou -6 .

$$(6 - k)^2 = 36 \quad \left\{ \begin{array}{l} 6 - k = 6 \rightarrow k = 0 \\ 6 - k = -6 \rightarrow k = 12 \end{array} \right.$$

A banca nos questiona o maior valor. Logo,

$$k = 12$$

Gabarito: Alternativa E

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Em calculadoras científicas, a tecla $\log$ serve para calcular logaritmos de base 10. Por exemplo, se digitamos 100 e, em seguida, apertamos a tecla $\log$, o resultado obtido é 2. A tabela a seguir apresenta alguns resultados, com aproximação de três casas decimais, obtidos por Pedro ao utilizar a tecla $\log$ de sua calculadora científica.

Número digitado	Resultado obtido após apertar a tecla $\log$
2	0,301
3	0,477
7	0,845

Utilizando-se os valores anotados por Pedro na tabela acima, a solução da equação $\log 6 + x = \log 28$ é:

- a) 0,563
- b) 0,669
- c) 0,966
- d) 1,623
- e) 2,402

Comentários:

Vamos reescrever a igualdade com os números decompostos.

$$\log 6 + x = \log 28$$

$$\log(2 \times 3) + x = \log(7 \times 2^2)$$

Iremos aplicar a propriedade do Logaritmo do Produto.

O logaritmo do **produto** é igual a **soma** de seus logaritmos.

$$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log(2 \times 3) + x = \log(7 \times 2^2)$$

$$\log 2 + \log 3 + x = \log 7 + \log 2^2$$

Aplicando a propriedade da Logaritmo da Potência no último fator.

O logaritmo de uma **potência** (base real positiva e expoente real) é igual a esta **potência vezes o logaritmo**.

$$\log_a x^p = p \times \log_a x$$

$$\log 2 + \log 3 + x = \log 7 + \log 2^2$$

$$\log 2 + \log 3 + x = \log 7 + 2 \times \log 2$$

$$x = \log 7 + \log 2 - \log 3$$

Por fim, vamos substituir os valores fornecidos no enunciado e calcular o valor de x .

$$x = \log 7 + \log 2 - \log 3$$

$$x = 0,845 + 0,301 - 0,477 \rightarrow x = 0,669$$

Gabarito: Alternativa B

5. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Os valores de x que satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} y = \log(x - 1) \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

São:

- a) 1 ; -1
- b) 1 ; 10
- c) 10 ; 1/10
- d) 10 ; 1/11
- e) 11 ; 11/10

Comentários:

Vamos desenvolver a segunda equação:

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

Ou seja, $y = 1$ ou $y = -1$.

Vamos substituir separadamente esses valores na primeira equação e calcular os valores de x .

$$y = 1$$

$$y = \log(x - 1)$$

$$1 = \log(x - 1)$$

$$10^1 = x - 1$$

$$10 = x - 1$$

$$x = 10 + 1 \rightarrow \mathbf{x = 11}$$

$$+ y = -1$$

$$y = \log(x - 1)$$

$$-1 = \log(x - 1)$$

$$10^{-1} = x - 1$$

$$\frac{1}{10} = x - 1$$

$$x = \frac{1}{10} + 1 \rightarrow \mathbf{x = \frac{11}{10}}$$

Logo, $x = 11$ ou $x = \frac{11}{10}$.

Apenas lembrando que as 2 soluções satisfazem a condição de existência do Logaritmo.

$$x - 1 > 0$$

$$\mathbf{x > 1}$$

Gabarito: Alternativa E

QUESTÕES COMENTADAS – CESGRANRIO

Inequações Logarítmicas

1. (CESGRANRIO / BR - 2015) A estabilidade de um determinado processo industrial é avaliada a partir de um índice N , que é um número real positivo. O processo é considerado estável se, e somente se,

$$3 \leq \log_3(N) \leq 4$$

O processo é dito instável se, e somente se, o mesmo não for estável.

Dessa forma, o referido processo industrial é considerado instável se, e somente se, o índice N pertence ao conjunto

- a) $] -\infty, 9[\cup] 12, +\infty[$
- b) $] 0, 27[\cup] 81, +\infty[$
- c) $] 0, 9[\cup] 12, +\infty[$
- d) $] 9, 12[$
- e) $] 27, 81[$

Comentários:

Vamos calcular o intervalo que o processo será estável e, por consequência, o intervalo restante é onde o referido processo é instável (nosso gabarito).

$$3 \leq \log_3(N) \leq 4$$

$$3^3 \leq N \leq 3^4$$

$$27 \leq N \leq 81$$

Então, o processo é estável no intervalo $(27 ; 81)$. Logo, ele será INSTÁVEL em todo o restante.



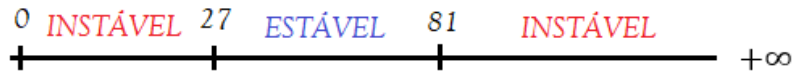


ACORDE!

Conforme estudamos na parte teórica, o **Logaritmando** **há de ser maior que 0**. Então,

$$N > 0$$

Então, observe que na parte esquerda da reta acima, estaremos limitados aos valores maiores que zero, uma vez que, conforme vimos, $N > 0$.



Logo, o referido processo industrial é considerado instável se, e somente se, o índice N pertence ao conjunto

$$]0, 27[\cup]81, +\infty[$$

Gabarito: Alternativa **B**

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Logaritmo

1. (CESGRANRIO / BR - 2015) Sejam $M = \log 30$ e $N = \log 300$.

Na igualdade $x + N = M$, qual é o valor de x ?

- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) +1
- e) +2

2. (CESGRANRIO / Liquigas - 2014) A sequência $\{a_n\}, n \in N$ é uma progressão geométrica de termos positivos cuja razão é $1/64$.

Considere $\{b_n\}, n \in N$ a sequência definida por:

$$b_n = \log_2((a_n)^3)$$

A sequência $\{b_n\}$ é uma progressão

- a) aritmética de razão -18.
- b) aritmética de razão -6.
- c) aritmética de razão 32.
- d) geométrica de razão 16.
- e) geométrica de razão 12.

3. (CESGRANRIO / BASA - 2013) Sabe-se que x e y são números reais tais que:

$$y = 5^{3x}$$

Conclui-se que x é igual a

- a) $\log_5(y^3)$
- b) $\log_5(y/3)$

- c) $\log_5(\sqrt[3]{y})$
- d) $-\log_5(3y)$
- e) $\frac{1}{3 \log_5(y)}$

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dado $\log_3 2 = 0,63$, tem-se que $\log_6(24)$ é igual a

- a) 1,89
- b) 1,77
- c) 1,63
- d) 1,51
- e) 1,43

5. (CESGRANRIO / BR - 2010) Se b é um número real positivo, diferente de 1, logo, deduz-se que

- a) $\log_b 7 > \log_b 3$
- b) $\log_b 12 = (\log_b 6)(\log_b 2)$
- c) $\log_b 24 = (\log_b 3) + 3(\log_b 2)$
- d) $\log_b (-10)^{-10} < 0$
- e) $\log_b \sqrt[5]{4} = \frac{\log_b 5}{\log_b 4}$

6. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) A magnitude de um terremoto na escala Richter corresponde ao logaritmo (na base 10) da medida da amplitude de determinadas ondas sísmicas, sob características padronizadas, produzidas durante um terremoto.

O poder destrutivo de um terremoto é proporcional à potência $3/2$ de sua amplitude. A razão do poder destrutivo entre dois terremotos, de escalas 5 e 6 na escala Richter, é de

- a) $(10)^{1,5}$
- b) $(10)^{-1,5}$
- c) 1
- d) $(1/100)^{-1,5}$
- e) $(1/10)^{1,5}$

7. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Sejam x , M , N e P números reais positivos que tornam verdadeiras as igualdades

$$\frac{\log M}{2} = \frac{\log N}{6} = \frac{\log P}{4} = \log x$$

Qual é o valor de K para o qual

$$\frac{N^2}{\sqrt{MP}} = x^k$$

- a) -1
- b) 3
- c) 4
- d) 6
- e) 9

8. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Se

$$y = \log_{81} \left(\frac{1}{27} \right) \text{ e } x \in R_+$$

são tais que $x^y = 8$, então x é igual a:

- a) $1/16$
- b) $1/2$
- c) $\log_3 8$
- d) 2
- e) 16

GABARITO

1. B
2. A
3. C
4. B
5. C
6. B
7. E
8. A

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Função Logarítmica

1. (CESGRANRIO / FINEP - 2011) Sejam F e G funções reais definidas em domínios convenientes, de modo que existam números reais y_1 e y_2 tais que

$$F(x) = y_1 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G(x) = y_2 = x^3$$

Com as devidas restrições, a saber, $y_2 \neq 0$, podemos calcular $F(y_2)$ e, nesse caso, encontraremos

- a) $-3y_1$
- b) $-y_1$
- c) y_1
- d) $3y_1$
- e) $(y_1)^3$

2. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Dada a função $f(x) = \log x$, de domínio $\mathbb{R}^{*+}$, têm-se $f(2) = 0,3$ e $f(3) = 0,48$. Se $f(p) = 1,38$, então p é igual a

- a) 12
- b) 18
- c) 24
- d) 30
- e) 36

GABARITO

1. D
2. C

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Equações Logarítmicas

1. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2018) Se x e y são números reais, tais que $2 \log(x - 2y) = \log x + \log y$, qual valor de x/y ?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

2. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2011) Se $\log x$ representa o logaritmo na base 10 de x , então o valor de n tal que $\log n = 3 - \log 2$ é

- a) 2.000
- b) 1.000
- c) 500
- d) 100
- e) 10

3. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2017) Qual o maior valor de k na equação

$$\log(kx) = 2 \log(x + 3)$$

para que ela tenha exatamente uma raiz?

- a) 0
- b) 3
- c) 6
- d) 9
- e) 12

4. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Em calculadoras científicas, a tecla $\log$ serve para calcular logaritmos de base 10. Por exemplo, se digitamos 100 e, em seguida, apertamos a tecla $\log$, o resultado obtido é 2. A tabela a seguir apresenta alguns resultados, com aproximação de três casas decimais, obtidos por Pedro ao utilizar a tecla $\log$ de sua calculadora científica.

Número digitado	Resultado obtido após apertar a tecla $\log$
2	0,301
3	0,477
7	0,845

Utilizando-se os valores anotados por Pedro na tabela acima, a solução da equação $\log 6 + x = \log 28$ é:

- a) 0,563
- b) 0,669
- c) 0,966
- d) 1,623
- e) 2,402

5. (CESGRANRIO / PETROBRAS - 2010) Os valores de x que satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} y = \log(x - 1) \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

São:

- a) 1 ; -1
- b) 1 ; 10
- c) 10 ; 1/10
- d) 10 ; 1/11
- e) 11 ; 11/10

GABARITO

1. D
2. C
3. E
4. B
5. E

LISTA DE QUESTÕES – CESGRANRIO

Inequações Logarítmicas

1. (CESGRANRIO / BR - 2015) A estabilidade de um determinado processo industrial é avaliada a partir de um índice N , que é um número real positivo. O processo é considerado estável se, e somente se,

$$3 \leq \log_3(N) \leq 4$$

O processo é dito instável se, e somente se, o mesmo não for estável.

Dessa forma, o referido processo industrial é considerado instável se, e somente se, o índice N pertence ao conjunto

- a) $] -\infty, 9[\cup] 12, +\infty[$
- b) $] 0, 27[\cup] 81, +\infty[$
- c) $] 0, 9[\cup] 12, +\infty[$
- d) $] 9, 12[$
- e) $] 27, 81[$

GABARITO

1. B

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.